Minimanual Compacto de

MATEMÁTICA

Ensino Fundamental

Teoria e Prática

Minimanual Compacto de

MATEMÁTICA
Ensino Fundamental

Teoria e Prática

Alessandra Bosquilha

João Tomás do Amaral

2ª Edição revista

EDITORA RIDEEL

EXPEDIENTE

Editor Responsável	**Italo Amadio**
Coordenadora de Produção Editorial	**Katia F. Amadio**
Assistente Editorial	**Edna Emiko Nomura**
Autores	**Alessandra Bosquilha**
	João Tomás do Amaral
Revisão	**Kimie Imai**
	Ariadne Escobar
Ilustrações	**Fabiana Fernandes**
	Wagner e Luciana
Projeto Gráfico e Diagramação	**EXATA Editoração**
Capa	**Antonio Carlos Ventura**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bosquilha, Alessandra
Minimanual compacto de matemática : teoria e prática : ensino fundamental. -- 2. ed. rev. -- São Paulo : Rideel, 2003.

ISBN 85-339-0586-6

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Amaral
João Tomás do . II. Título.

03-4646 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

EDITORA RIDEEL

Al. Afonso Schmidt, 879 – Santa Terezinha
Cep 02450-001 – São Paulo – SP
www.rideel.com.br – e-mail: sac@rideel.com.br

4 6 8 9 7 5
0 4 0 5

Apresentação

Em qualquer área de atuação que você se encontre, ela sempre estará presente: a Matemática.

Seus conceitos são tão básicos, que até mesmo a música pode ser convertida em expressões matemáticas. É uma ciência tão universal, que todas as mensagens das sondas espaciais lançadas até hoje são enviadas em linguagem matemática.

Em vista disso, o aprendizado da matemática é imprescindível. Dessa maneira, levamos até você o *Minimanual Compacto de Matemática – Teoria e Prática*, ricamente ilustrado e com inúmeros exemplos para tornar a aquisição desse conhecimento mais fácil e agradável.

Este manual traz o conteúdo do Ensino Fundamental, explicado em uma linguagem que tentamos tornar acessível, com inúmeros exemplos de aplicação dos conceitos oferecidos de modo que você possa utilizá-lo para tirar suas dúvidas e desenvolver no seu ritmo suas habilidades matemáticas. O *Minimanual Compacto de Matemática – Teoria e Prática* traz noções de Aritmética, Álgebra e Geometria, com exercícios de aplicação cotidiana imediata, a fim de facilitar a resolução dos pequenos problemas do dia-a-dia.

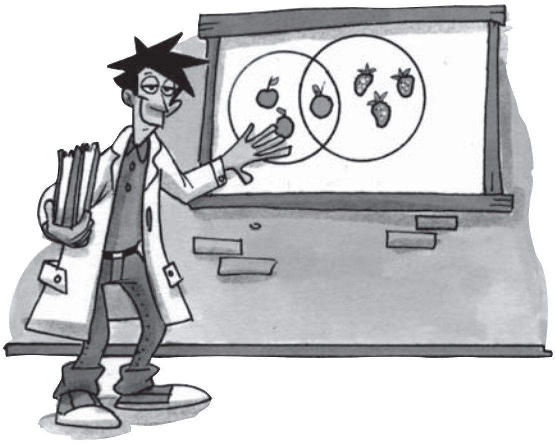
Há, também, no final deste livro, um encarte colorido, especialmente desenvolvido para fornecer a você noções sobre como entender as contas que chegam à sua residência e noções de economia, bem como a arte milenar do origami e o quebra-cabeças de origem chinesa, o tangran, dentre outras leituras, que ajudarão você a desenvolver sua criatividade e conhecimento matemático de uma maneira prazerosa e criativa.

Fica aqui a opinião da autora: conhecer a Matemática é conhecer melhor o mundo que nos cerca, de uma maneira crítica e consciente.

Então, mãos à obra!

SUMÁRIO

Capítulo 2



CONJUNTOS E SUA LINGUAGEM

Conjunto não possui definição, mas tem como noção intuitiva o *agrupamento* de qualquer tipo e quantidade de objetos.

Com esta noção, podemos identificar alguns conjuntos, conforme os dados a seguir.

Exemplos

1. O conjunto dos dias da semana.
2. O conjunto dos meses do ano.
3. O conjunto das letras do nosso alfabeto.
4. O conjunto das matérias que você está estudando em seu colégio.
5. O conjunto dos estados do Brasil.



Elemento é qualquer um dos objetos que compõe o conjunto.

Com base nos exemplos sobre conjuntos, podemos obter os seguintes exemplos.

1. Quinta-feira é um elemento do conjunto dos dias da semana, pois quinta-feira compõe este conjunto.
2. Dezembro é um elemento do conjunto dos meses do ano, pois dezembro compõe este conjunto.
3. A letra α (alfa) não é elemento do conjunto das letras do nosso alfabeto, pois α não compõe este conjunto, e sim o conjunto das letras do alfabeto grego.
4. A matéria Matemática é um elemento do conjunto das matérias que você estuda em seu colégio.
5. A Califórnia não é um elemento do conjunto dos estados do Brasil, pois a Califórnia não compõe este conjunto, e sim o conjunto dos estados dos Estados Unidos da América.

REPRESENTAÇÃO DOS CONJUNTOS

Os conjuntos serão designados ou identificados por letras maiúsculas do nosso alfabeto e serão representados entre chaves, onde os elementos são discriminados e separados por vírgula:

A = {segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado, domingo}

ou entre chaves, baseado em uma propriedade comum de todos os seus elementos.

A = {x | x é dia da semana}

B = {x | x é mês do ano}

C = {x | x é letra do nosso alfabeto}

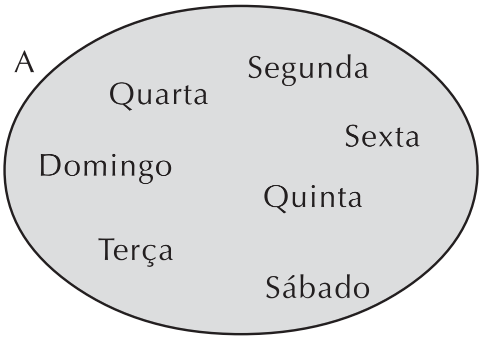
D = {x | x é matéria que você está estudando no seu colégio}

E = {x | x é estado do Brasil}

Observação

Onde encontramos a simbologia $x \mid x$ devemos ler da seguinte maneira: "x tal que x", que possui o significado "o elemento x deste conjunto deve satisfazer a condição...".

Os conjuntos podem ainda ser representados pelo chamado *Diagrama de Venn* como mostrado a seguir.



TIPOS DE CONJUNTO

Finito. É um conjunto que possui um número determinado de elementos.

Infinito. É um conjunto que possui um número indeterminado de elementos.
Por exemplo: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Unitário. É um conjunto que possui um único elemento.

Vazio. É um conjunto que não possui elementos.

Sua representação é dada por:

- duas chaves sem elemento ({ }).
- pelo símbolo (∅).

Veja o mapa do nosso país abaixo:



Banco de imagens Rideel

Vamos chamar de *A* o conjunto de todos os estados que compõe o mapa do Brasil.

A = {Amazonas, Pará, Roraima, Rondônia, Acre, Tocantins,...}

Olhando para o mapa podemos dizer que o estado do Paraná *pertence* ao conjunto *A*.

Em matemática existe um símbolo que substitui na frase a palavra *pertence*.

Notação	*Lê-se*
$\in$	pertence

Da mesma maneira, podemos dizer que o estado da Califórnia *não pertence* a *A*, pois a Califórnia é um estado dos Estados Unidos.

Da mesma maneira, existe um símbolo que representa a expressão *não pertence*.

Notação	*Lê-se*
$\notin$	não pertence

Vamos agora chamar de *B* o conjunto dos estados da região Sudeste do Brasil

B = {Espírito Santo, Minas Gerais, São Paulo, Rio de Janeiro}

e de *C* o conjunto composto por alguns países da América do Sul

C = {Argentina, Uruguai, Paraguai}

Para estabelecer relações entre os cojuntos usamos os seguintes símbolos.

Notação	*Lê-se*
$\subset$	está contido
$\supset$	contém
$\not\subset$	não está contido
$\not\supset$	não contém

Aplicando esses símbolos nos cojuntos *A*, *B* e *C* temos:

$$B \subset A$$

pois os estados da região Sudeste *estão contidos* entre os estados brasileiros.

$$A \supset B$$

pois o cojunto *A contém* todos os elementos de *B*.

Porém,

$$C \not\subset A$$

pois os países da América Latina *não estão contidos* entre os estados brasileiros.

E ainda,

$$\mathrm{A} \not\supset \mathrm{C}$$

pois o cojunto *A não contém* os elementos de *C*.

Exercícios

1. Dados os conjuntos a seguir:

   A = {segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado, domingo}
   B = {janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro}
   C = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, x, z}
   D = {Português, Matemática, História, Geografia, Ciência, Educação Artística, Inglês, Educação Física}
   E = {Alagoas}

   preencha as lacunas com $\in$ ou $\notin$.

   a) Português ..... *D*
   b) terça ..... *B*
   c) a ...... *E*
   d) outubro ...... *B*
   e) r ..... *A*
   f) Alagoas ...... *E*

2. Escreva os conjuntos:
   Exemplo: números naturais entre 10 e 15.
   A = {11, 12, 13, 14}
   a) Números naturais menores que 4
   b) Números naturais entre 99 e 102
   c) Números naturais maiores que 1.000.

3. Escreva quais e quantos são os elementos de cada conjunto.
   Exemplo:
   $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 5\} \rightarrow \{5, 6, 7, 8, ...\}$.
   Este conjunto possui infinitos elementos.
   a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$
      Lê-se *A* é o conjunto dos números naturais que são menores que 4.
   b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 7\}$
      Lê-se *B* é o conjunto dos números naturais que são menores ou iguais a sete.
   c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$
      Lê-se *C* é o conjunto dos números naturais que são maiores que 3.
   d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 10\}$
      Lê-se *D* é o conjunto dos números naturais que são maiores ou iguais a 10.

4. Seja $A = \{1, 2, 3, 5, 9\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{11, 12\}$
   Preencha as lacunas com $\subset$, $\supset$, $\not\subset$, $\not\supset$ apropriado.
   a) *A* ...... *B*
   b) *B* ...... *A*
   c) *C* ...... *A*
   d) *A* ...... *C*
   e) *B* ...... *C*
   f) *C* ...... *B*
   g) *A* ..... $\mathbb{N}$

Observações

1. A relação "está contido" ou a sua negação é utilizada do menor para o maior conjunto.
2. A relação "contém" ou a sua negação é utilizada do maior para o menor conjunto.

Subconjunto. Sejam *N* e *M* dois conjuntos. Dizemos que *N* é subconjunto de *M* se, e somente se, *N* está contido em *M*.

Observação

O conjunto vazio é o menor subconjunto de qualquer conjunto e o próprio conjunto é o maior subconjunto de um conjunto.

Relação de igualdade

Sejam N e M dois conjuntos. Dizemos que N é igual a M se, e somente se, N é subconjunto de M e M é subconjunto de N.

Exemplo

Se $N = \{2, 3, 4, 5\}$ e $M = \{5, 2, 4, 3\}$, então $N = M$, pois os elementos de N estão em M ($N \subset M$) e os elementos de M estão em N ($M \subset N$).

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

União (reunião). Sejam N e M dois conjuntos quaisquer. Desta maneira, temos que a união entre os conjuntos N e M ($N \cup M$) é um conjunto formado por elementos de N ou por elementos de M.

$$N \cup M = \{x \mid x \in N \text{ ou } x \in M\}$$

Exemplo

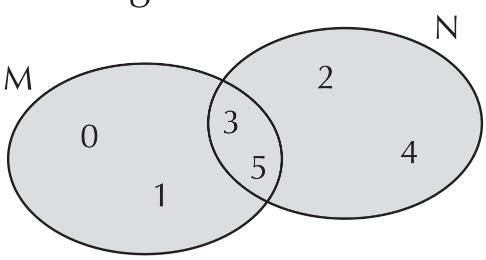
Sejam os conjuntos

$M = \{0, 1, 3, 5\}$ e $N = \{2, 3, 4, 5\}$.

Desta maneira,

$M \cup N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Representando em diagrama temos:



Intersecção. Sejam N e M dois conjuntos quaisquer. Desta maneira, temos que a intersecção entre N e M ($N \cap M$) é um conjunto formado por elementos que estão em N e M simultaneamente.

$$N \cap M = \{x \in \mid x \in N \text{ e } x \in M\}$$

Exemplo

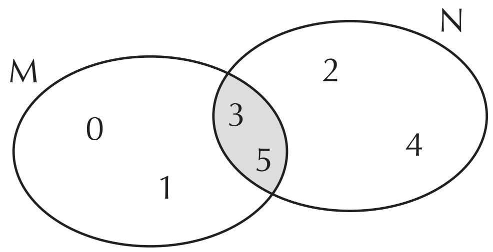
Sejam os conjuntos

$N = \{2, 3, 4, 5\}$ e $M = \{0, 1, 3, 5\}$.

Desta maneira,

$N \cap M = \{3, 5\}$.

Representando em diagrama



Observação

Se $M \cap N = \varnothing$, então M e N são denominados *conjuntos disjuntos*.

Diferença. Sejam M e N dois conjuntos quaisquer. Desta maneira, temos que a diferença entre M e N ($M - N$) é um conjunto formado pelos elementos que pertencem a M e não pertencem a N.

$$M - N = \{x \mid x \in M \text{ e } x \notin N\}$$

Exemplo

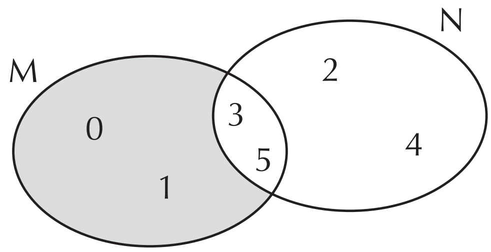
Sejam os conjuntos

$M = \{2, 3, 4, 5\}$ e $N = \{0, 1, 3, 5\}$.

Desta maneira,

$M - N = \{0, 1\}$.

Representando em diagrama



Exercícios

5. Represente os seguintes conjuntos:
   a) conjunto dos meses do ano
   b) conjunto dos dias da semana
   c) conjunto dos dias da semana que começam por *t*
   d) conjunto dos dias da semana que começam por *x*

6. Dado o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$, determine todos os subconjuntos dele.

7. Dado o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$, complete as sentenças a seguir de modo a torná-las sempre verdadeiras, usando os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\supset$, $\not\subset$, $\not\supset$:

   a) $0 \ldots. A$ b) $1 \ldots. A$
   c) $4 \ldots. A$ d) $7 \ldots. A$
   e) $\{0, 1\} \ldots. A$ f) $A \ldots. \{0, 1\}$
   g) $\{0\} \ldots. A$ h) $A \ldots. \{0\}$
   i) $A \ldots. \{7\}$ j) $\{0, 1, 2, 8\} \ldots. A$

8. Dados os conjuntos:
   $A = \{0, 1, 3\}$
   $B = \{0, 3, 5\}$
   $C = \{3, 7, 8\}$
   determine:
   a) $A \cup B$ b) $A \cap B$
   c) $A \cup C$ d) $A \cap C$
   e) $B \cup C$ f) $B \cap C$

Respostas

1. a) $\in$ d) $\in$
   b) $\notin$ e) $\notin$
   c) $\notin$ f) $\in$

2. a) $A = \{3, 2, 1, 0\}$
   b) $B = \{100, 101\}$
   c) $C = \{1.001, 1.002, 1.003, \ldots\}$

3. a) $A = \{3, 2, 1, 0\}$
   4 elementos
   b) $B = \{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$
   8 elementos
   c) $C = \{4, 5, 6, \ldots\}$
   infinitos elementos
   d) $D = \{10, 11, 12, \ldots\}$
   infinitos elementos

4. a) $\subset$ e) $\not\supset$
   b) $\supset$ f) $\not\supset$
   c) $\not\supset$ g) $\supset$
   d) $\not\subset$

5. a) M = {janeiro, fevereiro, março, abril, maio, ..., dezembro}

b) D = {segunda-feira, terça-feira, ..., domingo}

c) T = {terça-feira}

d) X = { } ou $\varnothing$

6. Dado: A = {0, 1, 2, 3}

   I) Subconjuntos com nenhum elemento: { }

   II) Subconjuntos com um único elemento:
   {0} {1} {2} {3}

   III) Subconjuntos com dois elementos:
   {0, 1} {1, 2} {2, 3}
   {0, 2} {1, 3}
   {0, 3}

   IV) Subconjuntos com três elementos:
   {0, 1, 2} {0, 2, 3} {1, 2, 3}
   {0, 1, 3}

7. a) $\in$ e) $\subset$ h) $\supset$
   b) $\in$ f) $\supset$ i) $\not\supset$
   c) $\notin$ g) $\subset$ j) $\not\subset$
   d) $\notin$

8. a) $A \cup B = \{0, 1, 3\} \cup \{0, 3, 5\} =$
   $= \{0, 1, 3, 5\}$

   b) $A \cap B = \{0, 1, 3\} \cap \{0, 3, 5\} =$
   $= \{0, 3\}$

   c) $A \cup C = \{0, 1, 3\} \cup \{3, 7, 8\} =$
   $= \{0, 1, 3, 7, 8\}$

   d) $A \cap C = \{0, 1, 3\} \cap \{3, 7, 8\} =$
   $= \{3\}$

   e) $B \cup C = \{0, 3, 5\} \cup \{3, 7, 8\} =$
   $= \{0, 3, 5, 7, 8\}$

   f) $B \cap C = \{0, 3, 5\} \cap \{3, 7, 8\} =$
   $= \{3\}$





Capítulo 3



OPERAÇÕES NO CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Somando números naturais

Para todo a, b, $\in \mathbb{N}$, existe um único $c \in \mathbb{N}$, de modo que $a + b = c$, onde a, b são denominados parcelas e c é denominado soma ou total. Assim, dizemos que a adição de dois números naturais é sempre um número natural.

Exemplo

$$\begin{array}{r l} 315 & \\ +\ 208 & \Big\rangle \text{ parcelas} \\ \hline 523 & \text{soma ou total} \end{array}$$

Propriedades da adição

1. *Comutativa*. Para todo a, $b \in \mathbb{N}$ temos que: $a + b = b + a$
   Exemplo: $3 + 5 = 5 + 3 = 8$
2. *Elemento neutro*. Existe o elemento neutro aditivo em $\mathbb{N}$, que é o zero, de modo que para todo $a \in \mathbb{N}$ temos que:
   $a + 0 = 0 + a = a$
   Exemplo: $9 + 0 = 0 + 9 = 9$

3. *Associativa*. Para todo *a*, *b*, *c* $\in \mathbb{N}$ temos que:
$(a + b) + c = a + (b + c)$
Exemplo: $(12 + 4) + 3 = 12 + (4 + 3) = 19$

Exercícios

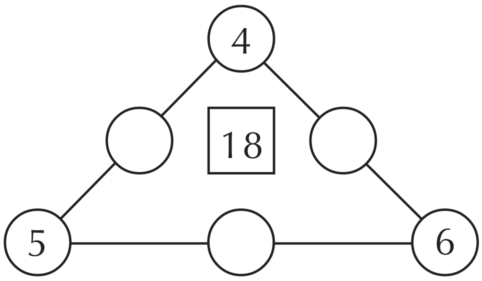
1. A tabela a seguir mostra os preços de alguns produtos no supermercado Zastrás:

carne de 1ª	R$ 6,00 o kg
arroz	R$ 1,00 o kg
feijão	R$ 2,50 o kg
macarrão	R$ 0,90 o pacote
ovos	R$ 2,00 a dúzia
iogurte	R$ 3,00 o litro
leite em pó	R$ 2,30 a lata

a) Se você for fazer uma compra nesse supermercado e adquirir cada um dos produtos destas lista, quanto gastará?
b) Se você quiser comprar apenas um quilo de feijão, um litro de iogurte e um quilo de carne, quanto gastará?

2. Preencha as lacunas com os sinais $>$, $<$ ou $=$.
a) 235 + 428 ... 427 + 236
b) 1.289 + 725 ... 644 + 1.490
c) 10.849 + 13.720 ... 11.452 + 5.813

3. Em triângulo mágico, a soma dos 3 números de cada lado é sempre a mesma. Preencha então os espaços em branco com os números 4, 5, 6, 7, 8 , 9. Sabendo que o número mágico desse triângulo é 18.



4. Observe a seguinte tabela de distâncias:

	Recife	Ribeirão Preto	Rio Branco	Rio de Janeiro	Salvador	Santos	S.J. dos Campos	São Luís	São Paulo	Teresina	Uberlândia	Vitória
Americana	2660	204	3479	545	1971	205	208	2845	133	2664	465	993
Anápolis	2380	662	2971	1296	1679	1045	1052	2005	973	1937	407	1386
Aracaju	501	2206	4848	1055	356	2249	2086	1578	2177	1142	2137	1408
Araçatuba	2919	331	3333	942	2231	604	595	2699	532	2631	487	1382
Araraquara	2671	89	3328	694	1983	354	357	2694	282	2565	364	1134
Bagé	4164	1670	4433	1938	3475	1566	1601	4219	1494	4132	1931	2386
Barretos	2715	127	3172	852	2027	510	513	2538	438	2470	287	1158
Barbacena	2238	612	3742	273	1550	604	504	2916	532	2482	699	597
Barreiras	1572	1342	3759	1784	883	1723	1723	1577	1651	1141	1071	1874
Bauru	2796	228	3398	755	2108	417	413	2764	345	2696	489	1208
Belém	2074	2622	4931	3250	2100	3005	3008	806	2933	947	2367	3108
Belo Horizonte	2061	523	3584	434	1372	658	611	2738	586	2302	556	524
Blumenau	3326	939	3927	1096	2633	728	758	3488	656	3401	1200	1548
Boa Vista	6483	4445	2230	5159	5794	4828	4833	6120	4756	6052	4190	5261
Brasília	2220	706	3123	1148	1531	1087	1087	2157	1015	1789	435	1238
Cachoeira de Itapemirim	2027	1153	4214	406	1338	839	676	2743	767	2307	1186	139
Campina Grande	191	2629	5371	2370	879	2772	2609	1530	2700	1094	2660	1931
Campinas	2665	238	3513	511	1982	171	174	2879	99	2698	497	959
Campo Grande	3332	930	2684	1444	2653	1086	1107	2979	1014	2911	894	1892
Campos	2130	996	4142	279	1441	765	602	2846	693	2410	1089	242
Caruaru	134	2495	5237	2444	745	2638	2475	1561	2566	1011	2526	1797
Cascavel	3433	846	3315	1333	2746	980	999	3279	908	3211	1067	1786
Caxias do Sul	3652	1215	4203	1426	2963	1054	1089	3764	982	3677	1476	1874
Chuí	4294	1857	4711	2068	3605	1696	1731	4406	1624	4319	2118	2516
Corumbá	3739	1327	3031	1841	3050	1483	1504	3376	1411	3308	1291	2889
Criciúma	3561	1174	4162	1330	2868	963	993	3723	891	3636	1435	1783
Cuiabá	3341	1303	1990	2017	2652	1686	1689	2978	1614	2910	1048	2119
Curitiba	3078	681	3669	852	2385	480	515	3230	408	3143	942	1300
Dourados	3515	906	2902	1503	2826	1078	1103	3272	1006	3129	1060	1884
Feira de Santana	805	1784	4526	1533	116	1918	1764	1483	1846	1047	1816	1124
São Paulo	2660	319	3604	429	1962	72	97	2970	–	2792	590	882

Responda:

a) Quantos quilômetros deve percorrer alguém que quer ir de Ribeirão Preto a Belo Horizonte?

b) Suponhamos que Mário em suas férias tenha resolvido visitar de carro alguns de seus parentes. Se ele mora em São Paulo, quantos quilômetros deverá percorrer para visitar seus tios que moram em Corumbá? Se estando em Corumbá ele resolve visitar um primo, que há muito tempo não vê, em São Luís, quantos quilômetros deverá percorrer? Depois de tanto viajar, quantos quilômetros Mário deverá percorrer para voltar a São Paulo?

c) Quantos quilômetros ele percorreu no total?

SUBTRAINDO NÚMEROS NATURAIS

Sejam dois números a, $b \in \mathbb{N}$. Se existir um $c \in \mathbb{N}$ de modo que $b + c = a$, então temos $a - b = c$, onde a é denominado minuendo, b é o subtraendo e c é a diferença ou resto.

Exemplo

	225	minuendo
−	13	subtraendo
	212	diferença ou resto

Exercícios

5. Identifique a propriedade que está sendo aplicada:
   a) $7 + 5 = 5 + 7$
   b) $74 + 0 = 74$
   c) $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$
   d) $4 + 8 = 8 + 4$
   e) $m + 0 = m$, $m \in \mathbb{N}$
   f) $27 + 0 = 27$
   g) $5 + (6 + 7) = (5 + 6) + 7$
   h) $a + b = b + a$, a e $b \in \mathbb{N}$

6. Verinha acabou de receber sua mesada. Ela somou o valor que recebeu a algumas economias que já tinha, ficando com R$ 45,00. Ela estava economizando para comprar um livro que custava R$ 14,00, um CD que custava R$ 16,00 e com o restante ela compraria um presente para sua irmã que faria aniversário em breve.
   Perguntas:
   a) Quanto ela gastou com o CD e o livro?
   b) Quanto restou para o presente da sua irmã?

7. Preencha com os sinais de $>$, $<$ e $=$.
   a) $1.314 - 134$ ... $1.418 - 215$
   b) $234 - 131$ ... $314 - 211$
   c) $418 - 124$ ... $735 - 614$

8. A seguir estão os nomes e as datas de nascimento e morte de alguns cientistas famosos:

George Boole (1815-1864)
Pierre de Fermat (1601-1665)
John Napier (1550-1617)
Nicolau Copérnico (1473-1543)
Simon Stevin (1548-1620)
Leonardo Fibonacci (1175-1250)

   Perguntas:
   a) Quantos anos viveu Pierre de Fermat?

b) Quem teve uma vida mais longa, John Napier ou Nicolau Copérnico?

c) Qual dentre esses seis importantes contribuintes para o desenvolvimento da matemática teve uma vida mais longa?

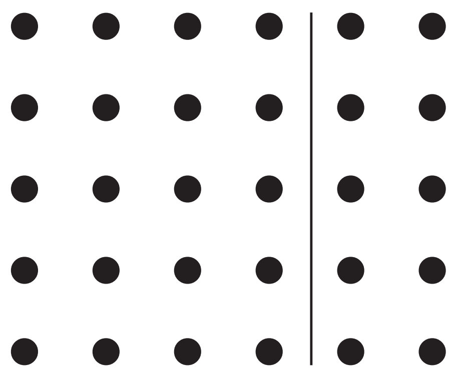
9. Numa subtração são dados: o minuendo igual a 374 e a diferença, a 126. Calcule o valor do subtraendo.

10. Numa subtração são dados: o subtraendo igual a 327 e a diferença, a 36. Calcule o valor do minuendo.

11. Numa subtração são dados: o subtraendo igual a 27 e o minuendo igual a 108. Calcule o valor da diferença.

MULTIPLICANDO COM NÚMEROS NATURAIS

Para calcularmos quantos alunos há nesta sala de aula,



poderíamos proceder da seguinte maneira: somar os alunos de cada fileira, ou seja,

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$$

ou contar o número de parcelas iguais a 5 e multiplicar por 5, assim

$$\underbrace{6}_{\text{nº de parcelas}} \times 5 = 30$$

De um modo geral, sejam a, $b \in \mathbb{N}$. Assim, a multiplicação entre a e b é igual à adição de a parcelas b.

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ parcelas}}$$

a e b são chamados de *fatores* e o resultado obtido é denominado *produto*.

Propriedades da multiplicação

1. *Comutativa*

   A ordem dos fatores não altera o produto, ou seja, $a \cdot b = b \cdot a$ para todo a, $b \in \mathbb{N}$.
   Exemplificando, temos:
   $3 \times 4 = 4 \times 3 = 12$

2. *Elemento neutro*

   Existe o elemento 1, tal que qualquer número natural multiplicado por 1 é sempre o próprio número, ou seja, $1 \cdot a = a \cdot 1$, para todo $a \in \mathbb{N}$.
   Exemplificando, temos:
   $1 \times 3 = 3 \times 1 = 3$



3. *Associativa*

   Pode-se associar dois fatores quaisquer sem que o produto seja alterado, isto é, para todo a, b, $c \in \mathbb{N}$, temos que:
   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
   Exemplificando, temos:
   $7 \times (3 \times 5) = (7 \times 3) \times 5 = 105$

4. *Distributiva da multiplicação com referência à adição*

   $3 \times (4 + 2) = 3 \times 4 + 3 \times 2$

Observação

O zero como fator anula o produto.

Exemplificando, temos:

a) $74 \times 87 \times 193 \times 0 \times 36 = 0$

b) $7 + 4 \times 0 = 7 + 0 = 7$

Exercícios

12. O desenho a seguir representa um cronômetro (aparelho utilizado para marcar o tempo):



Sabendo que 1 dia tem 24 horas e 1 hora tem 60 minutos, responda:

a) Quantos minutos tem um dia?

b) Quantas horas tem um mês?

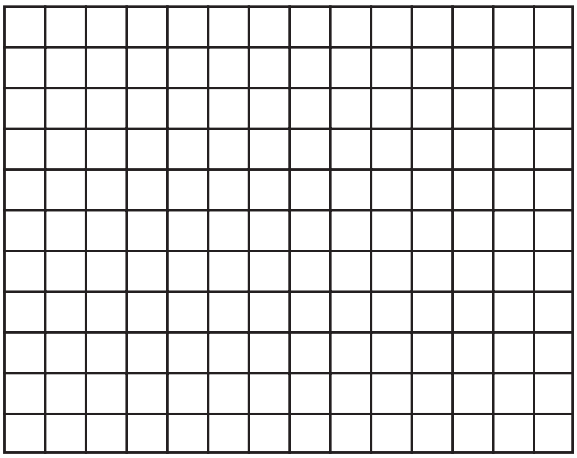
c) Quantos minutos tem um mês?

d) Quantas horas tem um ano de 365 dias?

e) Quantos minutos tem um ano de 365 dias?

13. José precisa comprar roupas novas pois vai começar a trabalhar e exigem que ele se apresente bem. Ele entrou em uma grande loja de departamentos e escolheu 2 calças de R$ 25,00 cada; 3 camisas de R$ 15,00 cada; 1 blusa de lã de R$ 40,00 e 2 pares de sapatos de R$ 30,00 cada. Quanto José gastou?

14. Quantos quadradinhos há no retângulo a seguir:



15. Identifique a propriedade que está sendo aplicada:

a) $7 \times 9 = 9 \times 7$

b) $7 \times 1 = 7$

c) $7 \times (8 \times 9) = (7 \times 8) \times 9$

d) $7 \times (8 + 9) = 7 \times 8 + 7 \times 9$

e) $2 \times (3 \times 4) = (2 \times 3) \times 4$

f) $6 \times 1 = 6$

g) $74 \times 27 = 27 \times 74$

DIVIDINDO COM NÚMEROS NATURAIS

Vovó Ignes comprou 3 caixas de bombons e deseja dividi-los igualmente com seus 9 netos. Em cada caixa há 27 bombons. Como ela deverá fazer a divisão?



Primeiro ela deverá descobrir quantos bombons tem no total: $27 \times 3 = 81$ e depois dividi-los por 9:

$$\begin{array}{r|l} 81 & 9 \\ \hline 0 & 9 \end{array}$$

Portanto, ela deverá dar 9 bombons a cada neto.

Cada posição da divisão feita anteriormente possui um nome específico, como mostrado a seguir:

$$\begin{array}{r|l} \text{DIVIDENDO } (D) & \text{DIVISOR } (d) \\ \hline \text{RESTO } (R) & \text{QUOCIENTE } (Q) \end{array}$$

Divisão exata

Dados dois números $A, B \in \mathbb{N}$ com $(B \neq 0)$, define-se como divisão exata de A por B se existe um único número $C \in \mathbb{N}$, tal que: $A = B \cdot C$, ou seja, se o resto é nulo.

Exemplificando, temos:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 16 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

Sendo $R = 0$

Divisão não-exata – quociente aproximado

Se efetuarmos 13 : 6, observaremos que não existe um número natural que faça com que essa divisão seja exata, pois o resto é diferente de zero. Ou seja,

$$\begin{array}{r|l} 13 & 6 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

$R = 1$

Assim: $2 \times 6 + 1 = 13$



Identificando os elementos da divisão, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} D = 13 \\ d = 6 \\ Q = 2 \\ R = 1 \end{array}\right\} d \times Q + R = D$$

Algumas informações importantes a respeito da divisão

1. O divisor deve ser sempre diferente de zero ($d \neq 0$)
2. Se: $D = 0$ e $d \neq 0$, então $Q = 0$
3. Se: $D = d$, então $Q = 1$
4. Se: $D = 0$ e $d = 1$, então $Q = D$
5. Na divisão não-exata: $R < d$

Exercícios

16. A Lua dá uma volta completa em torno da Terra em aproximadamente 28 dias. Quantas voltas aproximadamente ela dará em torno da Terra em 1 ano? (Considere o ano com 364 dias)
17. A luz viaja a 300.000 quilômetros por segundo. Se o planeta Marte se encontra a aproximadamente 240.000. 000 km do

Sol, quanto tempo (em segundos) demorará para que a luz proveniente do Sol alcance Marte?

18. O Uruguai, país que faz fronteira com o Brasil, possui aproximadamente 175.000 km² de extensão. Se lá a população é de aproximadamente 3.500.000 habitantes, qual a densidade demográfica desse país? (Densidade demográfica = nº de habitantes/km²).

19. Efetue as divisões, identificando os elementos delas segundo a seguinte simbologia:
D = dividendo;
d = divisor;
Q = quociente;
R = resto.

Exemplo:
25 : 4

$$\begin{array}{r|l} 25 & 4 \\ \hline 1 & 6 \end{array}$$

$D = 25$; $d = 4$; $Q = 6$; $R = 1$

a) 17 : 2	f) 37 : 0
b) 27 : 4	g) 0 : 37
c) 25 : 3	h) 27 : 27
d) 87 : 12	i) 127 : 1
e) 123 : 22	

20. Aplique a propriedade $D = d \times Q + R$ nas alternativas propostas no exercício anterior.

Exemplo:
a) $17 = 2 \times 8 + 1$

POTENCIAÇÃO COM NÚMEROS NATURAIS

É o caso particular da *multiplicação* quando os fatores são todos iguais. Por exemplo:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$$



Esse produto pode ser expresso dessa maneira: 3^5, onde 3 é chamado de *base* e indica o fator que está sendo repetido, e 5 é chamado de *expoente* e indica a quantidade de fatores 3. O resultado da operação, 243, é chamado de *potência*.

Genericamente: Se $A \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$, poderemos escrever:

$$\underbrace{A \times A \times A \times A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fatores}} = A^n$$

Exemplificando, temos:

I. $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

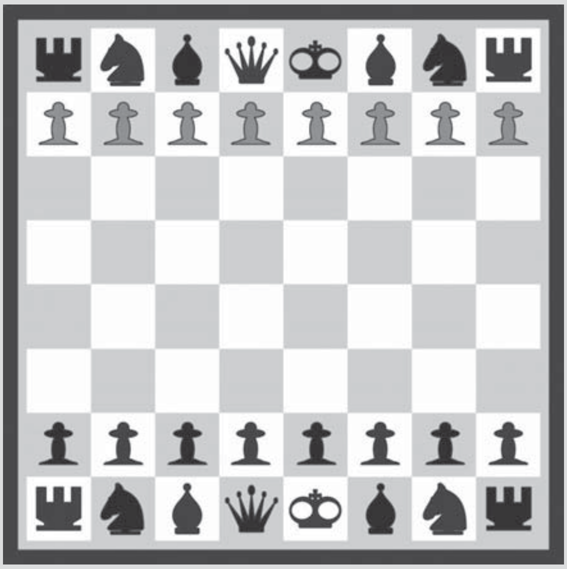
II. $7^2 = 7 \times 7 = 49$

III. $0^2 = 0 \times 0 = 0$

IV. $1^{18} = \underbrace{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times \ldots \times 1}_{18 \text{ fatores}} = 1$

<u>Uma das lendas do jogo de xadrez.</u>

Conta-se que um rei que gostava demais do jogo de xadrez resolveu compensar o inventor deste jogo.



Assim, o rei chamou o inventor e perguntou a ele: "Peça o que quiser e eu te darei como recompensa pela tua invenção".

A que o inventor respondeu:

"Dá-me pela primeira casa do tabuleiro um grão, pela segunda dois, pela terceira três, e assim continuando até a 64ª casa".

O rei, achando que o pedido era fácil de ser atendido, concordou imediatamente e mandou que a quantia em grãos fosse paga.

Acabou entretanto descobrindo que todos os celeiros reais não seriam suficientes para pagar a quantia pedida pelo inventor, pois:

1ª casa do tabuleiro — 1 grão
2ª casa do tabuleiro — 2 grãos
3ª casa do tabuleiro — $2 \times 2 = 4$ grãos
4ª casa do tabuleiro — $2 \times 2 \times 2 = 8$ grãos
e assim sucessivamente até
$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$ grãos!

Propriedades relativas às potências da mesma base

1. Para multiplicar potências da mesma base, conserva-se a base comum e adicionam-se os expoentes dos fatores indicados: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Assim, temos:

$$2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7 = 128$$

2. Para dividir potências de mesma base, conserva-se a base comum e subtraem-se os expoentes dos fatores na ordem indicada: $\dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$ com $b \neq 0$. Assim, temos:

$$2^4 : 2^3 = 2^{4-3} = 2^1 = 2$$

3. Para elevar uma potência a um outro expoente, eleva-se a base a um expoente expresso pelo produto dos expoentes dados $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Assim, temos:

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12} = 4.096$$

4. Para elevar uma operação de multiplicação a um determinado expoente, eleva-se cada fator a esse expoente $(a^n \cdot b^m)^r = a^{n \cdot r} \cdot b^{m \cdot r}$. Assim, temos:

$$(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2 = 9 \times 16 = 144$$

A mesma propriedade se aplica à divisão $\left(\dfrac{a^n}{b^m}\right)^r = \dfrac{a^{n \cdot r}}{b^{n \cdot r}}$

Expoente zero

Qualquer número natural, diferente de zero, elevado a expoente 0 é igual a 1.

$$A^0 = 1 \text{ com } A \neq 0, A \in \mathbb{N}$$

Exemplificando, teríamos:

$$7^0 = 1; (43)^0 = 1; 0^0 \text{ é indeterminado}$$

Potenciação de expoente um

Qualquer número natural elevado a expoente um é igual ao próprio número natural, ou seja, para todo $a \in \mathbb{N}$ temos que:

$$a^1 = a$$

Exemplificando, temos:

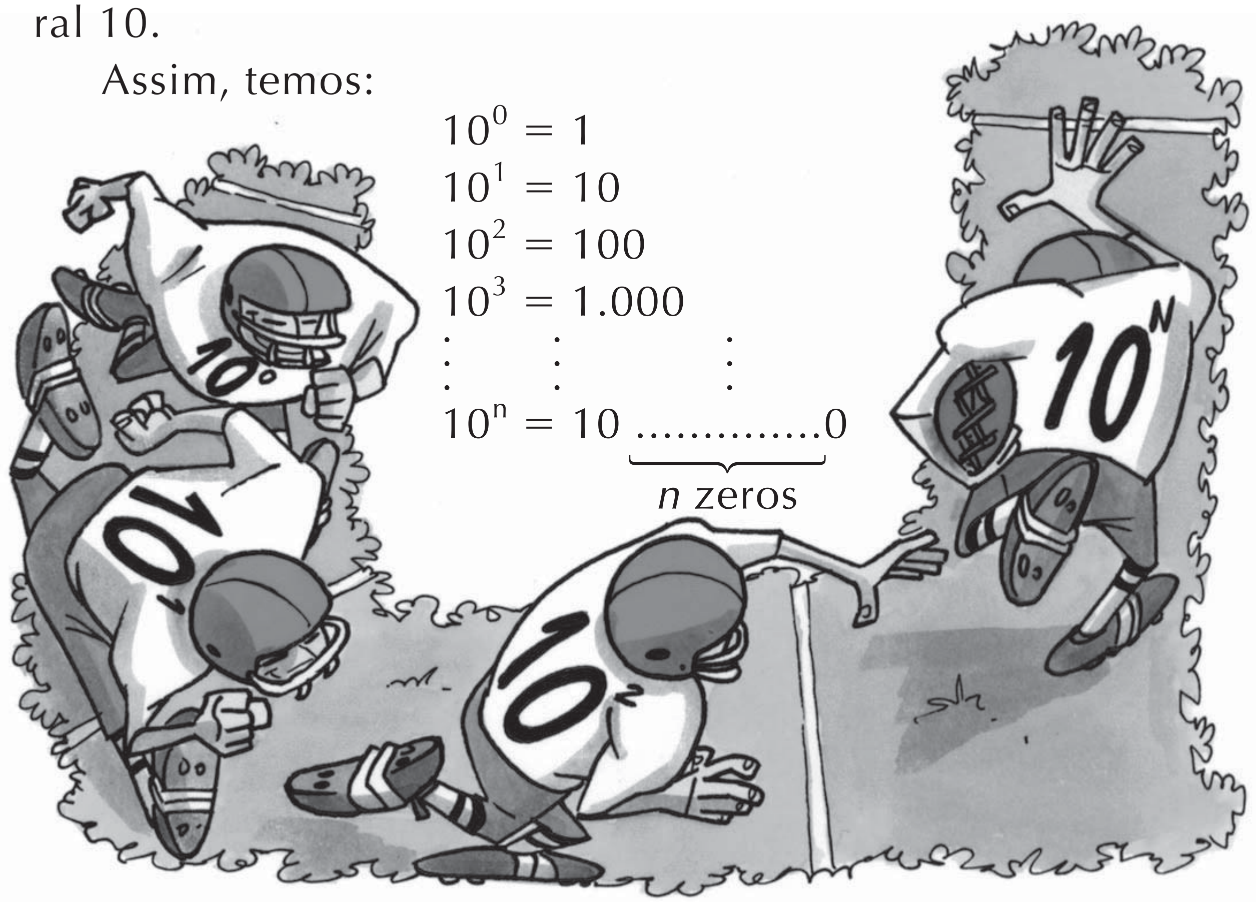
$$7^1 = 7; \quad (43)^1 = 43; \quad 0^1 = 0$$

Potências notáveis de base decimal

São assim denominadas as potências cuja base é o numeral 10.

Assim, temos:

$$10^0 = 1$$
$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 100$$
$$10^3 = 1.000$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$10^n = 10\underbrace{.............0}_{n \text{ zeros}}$$



Assim vários números muito grandes,especialmente aqueles usados em Astronomia ou em Física, podem se escritos de maneira simplificada.

Aqui estão alguns exemplos de grandezas astronômicas que podem ser simplificadas com o uso da potência de 10:

Distância média da Terra ao Sol:

$$150 \times 10^6 \text{ km ou } 150.000.000 \text{ km}$$

Massa da Terra:

$$6 \times 10^{24} \text{ kg ou } 6.\underbrace{000...}_{24 \text{ zeros}}$$

Massa da Lua:

$$74 \times 10^{21} \text{ ou } 7.4\underbrace{00...}_{21 \text{ zeros}}$$

Exercícios

21. Calcule as seguintes potências, indicadas:
    - a) 2^3
    - b) 3^2
    - c) 5^3
    - d) 4^2
    - e) 16^2
    - f) 20^3
    - g) 33^2
    - h) 102^2
    - i) 8^0
    - j) 8^1
    - l) 0^1

22. Aplique as propriedades da potenciação nos exercícios a seguir:
    - a) $5^7 \times 5^4$
    - b) $3^5 \times 3^3$
    - c) $7^4 \times 7^2$
    - d) $5^7 : 5^4$
    - e) $3^5 : 3^3$
    - f) $7^4 : 7^2$
    - g) $(2 \times 5)^2$
    - h) $(10 : 5)^3$
    - i) $2^8 : 2^8$

23. Escreva os números a seguir usando potências de 10
    - a) 750.000
    - b) 200.000.000
    - c) 125.000

RADICIAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

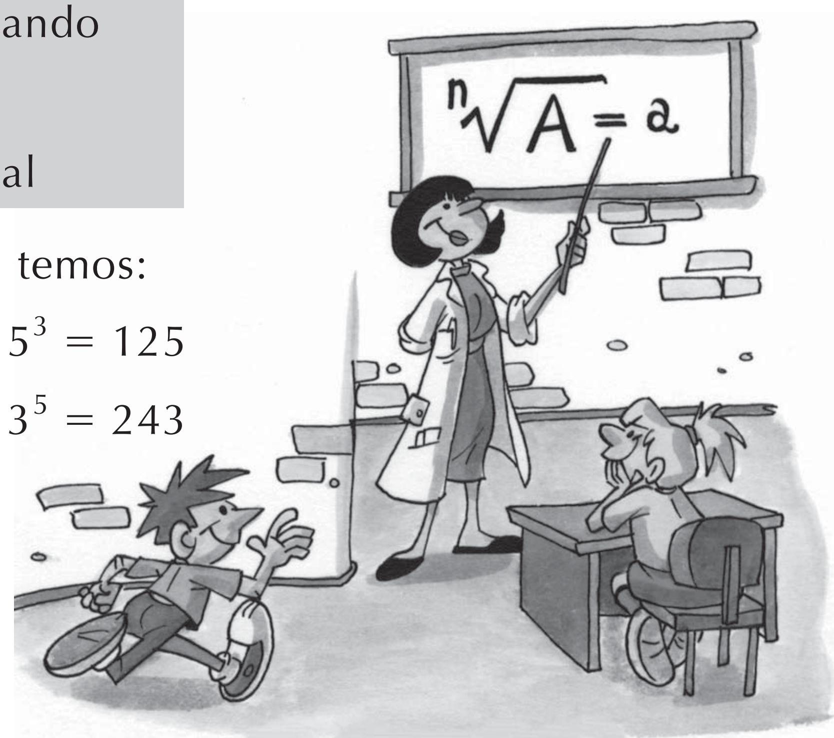
A igualdade $8^2 = 64$ indica que se elevarmos o número 8 ao expoente 2 (quadrado) obteremos a potência de valor 64. Isto quer dizer que se extrairmos a raiz quadrada de 64 teremos como resultado da operação o valor 8. Esse valor é chamado de *raiz quadrada*.

$$8^2 = 64 \rightarrow \sqrt{64} = 8$$

Veja o quadro ao lado:

Cada um dos elementos têm um nome específico. São eles:

n	→	índice da raiz
A	→	radicando
a	→	raiz
$\sqrt{\ }$	→	radical



Exemplificando, temos:

$\sqrt[3]{125} = 5$, pois $5^3 = 125$

$\sqrt[5]{243} = 3$, pois $3^5 = 243$

RESOLUÇÃO DE EXPRESSÕES ARITMÉTICAS

A resolução de uma expressão aritmética se faz procedendo da seguinte maneira:

• *Primeira fase*: resolvem-se as operações que estiverem entre os parênteses ( ), depois os colchetes [ ] e finalmente as chaves { }, sempre a partir dos mais internos, que geralmente são os parênteses ( ), para os externos.

- *Segunda fase*: ordem das operações:

Grupo I — adição e subtração
Grupo II — multiplicação e divisão
Grupo III — potenciação e radiciação

Caso hajam duas operações de um mesmo grupo, resolve-se primeiramente a que primeiro aparecer. Caso hajam duas operações de grupos distintos, resolve-se primeiramente as do *grupo III*, depois as do *grupo II* e finalmente as do *grupo I*, levando-se sempre em conta as posições que as operações ocupem com referência à *primeira fase*.

Exercícios Ilustrativos

1. $4 + 2 \times 8 - 3 \times 5 - 1$
$= 4 + 16 - 15 - 1$
$= 20 - 15 - 1$
$= 5 - 1$
$= 4$

2. $36 + (5 \times 4 - 3 \times 6) \times 2 - 2 \times 4$
$= 36 + (20 - 18) \times 2 - 2 \times 4$
$= 36 + 2 \times 2 - 2 \times 4$
$= 36 + 4 - 8$
$= 40 - 8$
$= 32$

3. $107 - \{27 + (36 - 2 \times 5) - [2 + 3 \times (4 - 2)] - 1\}$
$= 107 - \{27 + (36 - 10) - [2 + 3 \times 2] - 1\}$
$= 107 - \{27 + 26 - [2 + 6] - 1\}$
$= 107 - \{27 + 26 - 8 - 1\}$
$= 107 - \{53 - 8 - 1\}$
$= 107 - \{45 - 1\}$
$= 107 - 44$
$= 63$



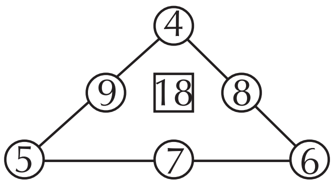
4. $\{2 + 4^2 : (2 \times 5 - 3^2) \times [3 + 2^2 \times (17 + 2^3)] + 5^3\} : 71$
$= \{2 + 16 : (2 \times 5 - 9) \times [3 + 4 \times (17 + 8)] + 125\} : 71$
$= \{2 + 16 : (10 - 9) \times [3 + 4 \times 25] + 125\} : 71$
$= \{2 + 16 : 1 \times [3 + 100] + 125\} : 71$
$= \{2 + 16 : 1 \times 103 + 125\} : 71$
$= \{2 + 16 \times 103 + 125\} : 71$
$= \{2 + 1.648 + 125\} : 71$
$= \{1.650 + 125\} : 71$
$= 1.775 : 71$
$= 25$

Exercícios

24. Resolva as seguintes expressões aritméticas:

a) $(21 + 3) + (32 + 5) + (48 + 3) + 1$
b) $(36 + 2) + [25 + (22 + 4) + 1]$
c) $(32 + 25) + \{42 + [17 + (28 + 12)] + 4\}$
d) $(42 + 27) - (21 - 2) + 5$
e) $(36 - 2) + [28 - (12 + 4) + 7]$
f) $(27 + 35) - \{36 + [17 - (28 - 12) + 12]\}$
g) $(28 - 4 \times 3) - (18 - 5 \times 3) - 5$
h) $[43 + (3 + 2 \times 7) \times 2 - 45] \times 2$
i) $\{44 - [(32 - 27) \times 3 - 2] \times 2\} + (46 - 27) \times 3$
j) $(16 - 5 \times 2) : 3 + (17 + 15) : 4$
l) $(20 - 5 \times 3) : 5 + [(128 - 97) - 8 \times 2] : 3$
m) $(37 - 4 \times 8) \times 5 + 2 : [(36 - 18) : 3 - (5 \times 3 + 1) : 4]$
n) $(25 - 5 \times 4) : 5 + \{[37 - (6 \times 5 + 4 \times 1)] : 3 + 4\}$
o) $\{[57 + (20 : 5 + 2)] : (3 \times 2 + 1)\} \times 2$
p) $(2 \times 8^2 - 4 \times 5^2) : 7 + (2^4 + 1)$
q) $(4 \times 8^2 - 6^3) : 2^3 - 5$
r) $[4^2 \times 2 + (76 - 2 \times 5) + 2 \times 5] : 3^2 + 1$
s) $\{[5^2 + (3^2 + 2^2) \times 2] : 3 - 1\} : 2^2 + 3$

Respostas

1. a) R$ 17,70
   b) R$ 11,50
2. a) =
   b) <
   c) >
3. 

4. a) 523 km,
   b) 1.411 km, 3.376 km, 2.970 km.
   c) 7.757 km
5. a) comutativa
   b) elemento neutro
   c) associativa
   d) comutativa
   e) elemento neutro
   f) elemento neutro
   g) associativa
   h) comutativa
6. a) R$ 30,00
   b) R$ 15,00
7. a) <
   b) =
   c) >
8. a) 64 anos
   b) Nicolau Copérnico
   c) Leonardo Fibonacci
9. 248
10. 363
11. 81
12. a) 1.440
    b) 720
    c) 43.200
    d) 8.640
    e) 518.400
13. R$ 195,00
14. 154
15. a) comutativa
    b) elemento neutro
    c) associativa
    d) distributiva em relação à adição
    e) associativa
    f) elemento neutro
    g) comutativa
16. 13 voltas
17. 800 segundos
18. 20 hab/km^2
19. a) $D = 17$; $d = 2$; $Q = 8$; $R = 1$
    b) $D = 27$; $d = 4$; $Q = 6$; $R = 3$
    c) $D = 25$; $d = 3$; $Q = 8$; $R = 1$
    d) $D = 87$; $d = 12$; $Q = 7$; $R = 3$
    e) $D = 123$; $d = 22$; $Q = 5$; $R = 13$
    f) $D = 37$; $d = 0$; Q não é possível, pois d = 0
    g) $D = 0$; $d = 37$; $Q = 0$; $R = 0$

h) $D = 27$; $d = 27$; $Q = 1$; $R = 0$
i) $D = 127$; $d = 1$; $Q = 127$; $R = 0$

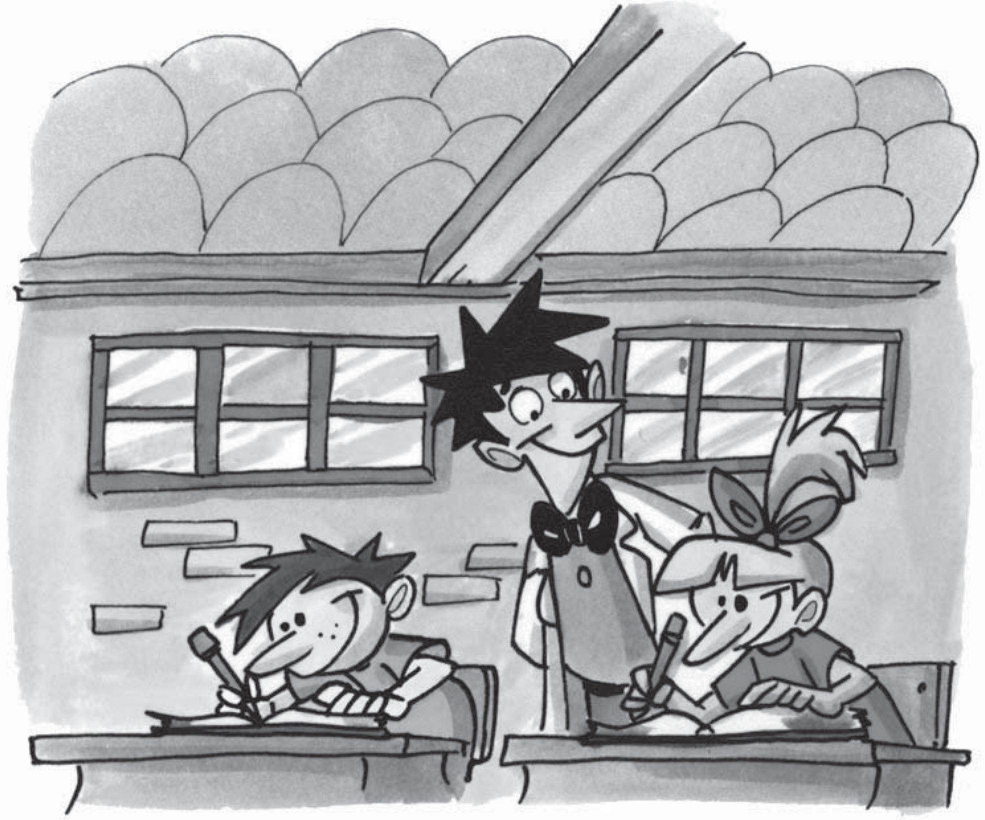
20. a) $17 = 2 \times 8 + 1$
b) $27 = 4 \times 6 + 3$
c) $25 = 3 \times 8 + 1$
d) $87 = 12 \times 7 + 3$
e) $123 = 22 \times 5 + 13$
f) não é possível (d = 0)
g) $0 = 37 \times 0 + 0$
h) $27 = 27 \times 1 + 0$
i) $127 = 1 \times 127 + 0$

21. a) 8 b) 9
c) 125 d) 16
e) 256 f) 8.000
g) 1.089 h) 10.404
i) 1 j) 8
l) 0

22. a) $5^{7+4} = 5^{11}$ b) $3^{5+3} = 3^{8}$
c) $7^{4+2} = 7^{6}$ d) $5^{7-4} = 5^{3}$
e) $3^{5-3} = 3^{2}$ f) $7^{4-2} = 7^{2}$
g) $2^{2} \times 5^{2}$ h) $10^{3} : 5^{3}$
i) $2^{8-8} = 2^{0}$

23. a) 75×10^{4}
b) 2×10^{8}
c) 125×10^{3}

24. a) 113 j) 10
b) 90 l) 6
c) 160 m) 26
d) 55 n) 6
e) 53 o) 18
f) 13 p) 21
g) 8 q) 0
h) 64 r) 13
i) 75 s) 7





Capítulo 4

DIVISOR DE UM NÚMERO

A professora de ginástica de uma escola está organizando um desfile de comemoração do dia da Independência do Brasil, o 7 de Setembro, e para tanto ela dispõe de 21 alunas. De quantas maneiras diferentes ela poderia agrupar as meninas?



A resposta é de quatro modos distintos, formando os agrupamentos a seguir:

21 grupos de 1 menina
7 grupos de 3 meninas
3 grupos de 7 meninas
1 grupo de 21 meninas

Com isso chegamos à conclusão de que os pares (21, 1), (7, 3), (3, 7) e (1, 21) são os *fatores* de 21. Nesse caso, os números 1, 3, 7 e 21 que, quando dividem o número 21, deixam resto zero são chamados de *divisores* de 21.

Para determinarmos o conjunto dos divisores de um número qualquer, devemos efetuar a divisão dele por todos os números de 1 até ele e reunir aqueles cuja divisão for exata.

Assim, temos:

D(5) = {1, 5}
D(27) = {1, 3, 9, 27}

Observações

1. O conjunto dos divisores de um número é finito.
2. O 1 é o menor divisor natural de todos os números.
3. Todo número natural diferente de zero é divisor de si mesmo.

Exercícios

1. Quais são os pares de números naturais que têm como produto os números a seguir:
   Exemplo: 12 ⇒ (1, 2), (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2) e (12, 1)
   a) 16
   b) 24
   c) 32
   Com base nas respostas aos itens anteriores, escreva quais são os divisores de 16, 24, 32
   Exemplo: D(12) = 1, 2, 3, 4, 6, 12.
2. Responda com V (verdadeiro) ou F (falso)
   a) (   ) 25 é divisor de 100, pois 100 : 25 = 4 com resto zero.
   b) (   ) 4 é fator de 32, pois $4 \cdot 8 = 32$.
   c) (   ) O conjunto dos divisores de um número é infinito.

CONHEÇA AS REGRAS DE DIVISIBILIDADE

Divisibilidade por 2

Um número é divisível por 2 quando o último algarismo da direita for par, ou seja, quando o número dado, terminar em: 0, 2, 4, 6, 8.

Exemplificando, teríamos:

502 → é divisível por 2, pois o algarismo das unidades é par.

503 → não é divisível por 2, pois o algarismo das unidades não é par.



Exercícios

3. Dos números a seguir, quais são divisíveis por 2:
   a) 35   d) 36
   b) 78   e) 138
   c) 91   f) 551

4. Preencha a tabela a seguir:

x	3	6	–	12	–	–	21
$2 \cdot x$	–	–	18	–	30	36	–

Os números da linha $2 \cdot x$ formam uma *seqüência numérica*.

Podemos ainda dizer que os números da segunda linha são o *dobro* (2 vezes maiores) que os números da primeira linha.

5. O que há em comum entre os números divisíveis por 2?

6. Sem fazer as divisões, assinale quais números são divisíveis por 2:
   a) 13   d) 204
   b) 28   e) 111.336
   c) 115   f) 22.463

Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for um número divisível por 3.

Exemplificando, teríamos:

249 → é divisível por 3, pois 15 (2 + 4 + 9 = 15) é divisível por 3;

283 → não é divisível por 3, pois 13 (2 + 8 + 3 = 13) não é divisível por 3.



Exercícios

7. Dos números a seguir, quais são divisíveis por 3.
   a) 415 d) 205
   b) 69 e) 42.231
   c) 1.201 f) 333
   Dica: Some os algarismos dos números anteriores.
   Exemplo:
   415 → 4 + 1 + 5 = 10
   Agora divida o resultado das somas por 3.
   O que você observa nos resultados?

8. Preencha a tabela a seguir:

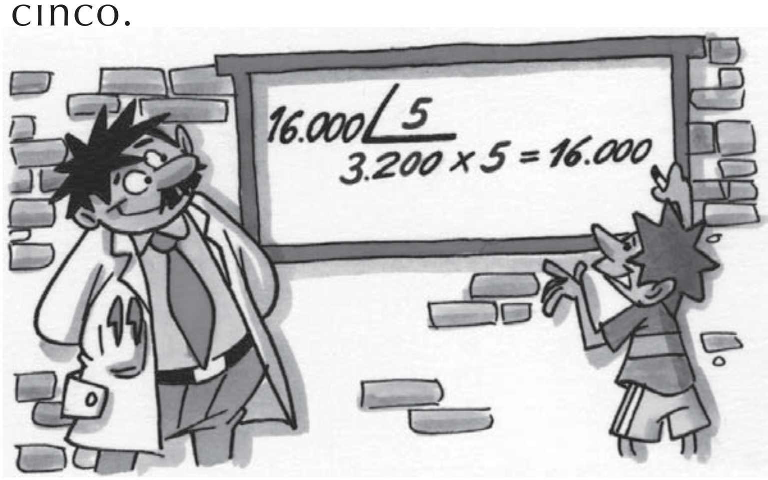
x	2	4	–	–	10	12
3 · x	6	12	18	24	–	–

Os números da linha 3 · x são três vezes maiores, o *triplo*, dos números da linha x.

9. Sem fazer a divisão, assinale quais números são divisíveis por 3.
   a) 20 d) 8.004
   b) 72 e) 10.024
   c) 91 f) 108

Divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 se o algarismo das unidades for zero ou cinco.



Exercícios

10. Dos números a seguir, quais são divisíveis por 5?
    a) 505
    b) 123
    c) 14.231
    d) 695
    e) 9.005
    f) 403
    g) 1.235
    h) 11.340
    i) 4.803

    O que você pôde observar em comum entre os números divisíveis por 5?

11. Sem fazer contas, assinale quais entre os números a seguir são divisíveis por 5.
    a) 134.050
    b) 63.400
    c) 2.403
    d) 314.001
    e) 4.140
    f) 1.207

Erastótenes (276-195 a.C.)

Famoso matemático e astrônomo grego, foi o primeiro a medir o tamanho da Terra corretamente. Ele mostrou que o diâmetro aproximado da Terra é de 12.713 km.



DESCOBRINDO QUAIS NÚMEROS SÃO PRIMOS E QUAIS SÃO COMPOSTOS

Números primos

É número primo todo número que admite somente dois divisores: a unidade e ele mesmo.

Números compostos

É número composto todo número que admite mais do que dois divisores.

Para descobrir quais números são primos, podemos utilizar o mesmo método utilizado por Erastótenes:

~~1~~	(2)	(3)	~~4~~	(5)	~~6~~	(7)	~~8~~	~~9~~	~~10~~
(11)	~~12~~	(13)	~~14~~	~~15~~	~~16~~	(17)	~~18~~	~~19~~	~~20~~
~~21~~	~~22~~	(23)	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	(29)	~~30~~
(31)	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	(37)	~~38~~	~~39~~	~~40~~
(41)	~~42~~	(43)	~~44~~	~~45~~	~~46~~	(47)	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Podemos observar nesse quadro que os números circulados, que permaneceram sem ser riscados são números primos. Para indentificá-los ele procedeu da seguinte maneira:

1º riscou o número 1, pois ele não é primo nem composto;

2º riscou todos os números pares com exceção do 2, pois todos têm mais de 2 divisores;

3º riscou todos os números divisíveis por 3, com exceção do 3, pois todos têm mais de 2 divisores;

4º como o 4 já estava riscado pois é divisível por 2, ele riscou todos os números divisíveis por 5, com exceção do 5, pois todos têm mais de 2 divisores;

E assim ele procedeu até obter todos os números primos menores que 50.

São eles: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Além do método de Erastótenes, há outro modo de reconhecer se um número é primo. É o chamado *método prático*.

Divide-se o número dado pela sucessão dos números primos, a saber: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Caso se obtenha o quociente menor ou igual ao divisor antes de se obter nessas divisões o resto nulo, diz-se que o número dado é *primo*.

Exemplificando:

Verificar se o número 113 é primo ou não.

Aplicamos então a regra prática:

113	2	113	3	113	5	113	7	113	11
13	56	23	37	13	22	43	16	03	10
1		2		3		1		3	

Foi obtido o quociente menor que o divisor antes de o resto ser nulo.

Portanto 113 é número primo.

Números primos entre si

Dois ou mais números são primos entre si se, e somente se, o único divisor comum entre eles for o 1.

Exemplificando:

Os números: 5, 7, 27. São primos entre si, pois:

$$D(5) = \{1, 5\}$$
$$D(7) = \{1, 7\}$$
$$D(27) = \{1, 3, 9, 27\}$$

e o único divisor comum, como podemos observar, é o 1.

Exercício

12. Determine entre os números a seguir quais são primos:
   a) 101 b) 141 c) 127 d) 129

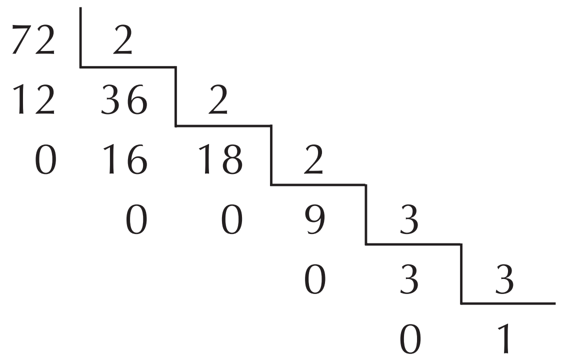
Decompondo um número em fatores primos

Dado um número qualquer, podemos decompô-lo em fatores primos pela *regra prática*, bastando para tanto dividi-lo pelo menor primo que o número dado admita como divisor. Com o quociente resultante da primeira divisão deve-se proceder da mesma maneira até que o quociente seja 1.

Exemplificando:

Vamos decompor o número 72 em fatores primos:

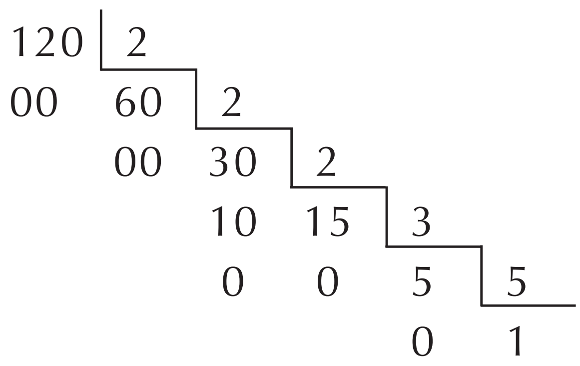
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	



Logo: $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

Vamos decompor o número 120 em fatores primos:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	



Logo: $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

Em suma, decompor um número natural em seus fatores primos é apresentá-lo na forma de um produto de todos os seus fatores primos.

Exercícios

13. Decomponha os números a seguir utilizando a regra prática e escreva-os na forma de produto de fatores primos:
Exemplo:

50	2
25	5
5	5
1	

$50 = 2 \times 5^2$

a) 42 b) 98 c) 44 d) 35

14. Qual a expressão que representa o número 90 decomposto em fatores primos?

a) $2^2 \cdot 5 \cdot 7$

b) $2 \cdot 3 \cdot 7$

c) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

d) $2^2 \cdot 5$

Determinação da quantidade de divisores de um número

Para tanto:

– Decompomos em fatores primos o número dado;

– e, em seguida, tomamos os expoentes de cada um dos fatores primos (escritos uma única vez), e a cada um dos expoentes adicionamos uma unidade; em seguida multiplicamos os números obtidos, obtendo assim a quantidade de divisores (QD) do número dado.

Assim,

Determinar o número de divisores de 72.

Como 72 pode ser escrito da seguinte maneira:

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

então:

$$QD(72) = (3 + 1) \times (2 + 1) = 4 \times 3 = 12$$

$$QD(72) = 12$$

Como determinar quais são os divisores de um número

Para a determinação dos divisores de um número procede-se da seguinte maneira:

a) Decompõe-se o número dado em fatores primos.

b) Traça-se uma outra reta vertical ao lado da decomposição em fatores primos.

c) A seguir efetua-se o produto do primeiro fator primo pela unidade após colocarmos o resultado na linha abaixo, à direita do fator.



d) Multiplica-se cada um dos fatores por todos os números que estão acima da linha dele, formando-se então o conjunto dos divisores do número dado, com o cuidado de não repetir os números.

Exemplificando, teríamos:

Determinar o conjunto de divisores de 72.



		1
72	2	$2 \times 1 = 2$
36	2	$2 \times 2 = 4$
18	2	$2 \times 4 = 8$
9	3	$3 \times 1 = 3$; $3 \times 2 = 6$; $3 \times 4 = 12$; $3 \times 8 = 24$
3	3	$3 \times 3 = 9$; $3 \times 6 = 18$; $3 \times 12 = 36$; $3 \times 24 = 72$
1		

Logo: D(72) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 36, 72}

MÁXIMO DIVISOR COMUM: o mdc

No dia das crianças, a dona Clara queria distribuir 36 pirulitos e 42 bombons para algumas crianças da vizinhança. No entanto, ela queria dar a mesma quantidade de doces para cada criança. Para quantas crianças ela poderia dar os doces?

A resposta pode ser obtida determinando-se o mdc entre 36 e 42.

Para tanto, determinaremos o conjunto de divisores de cada um dos números dados, isto é:

$$D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$D(42) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$

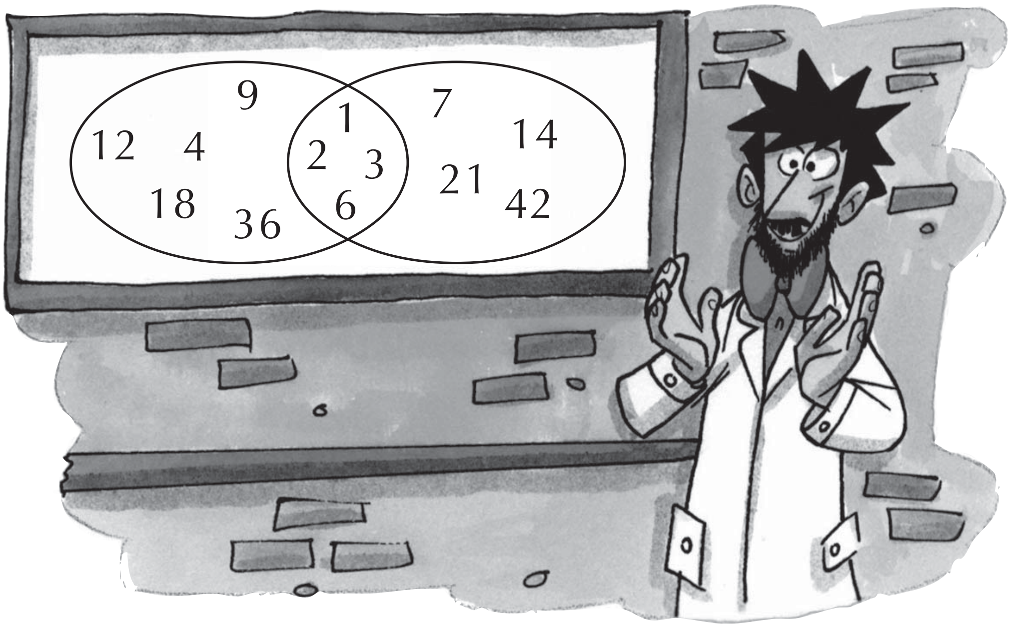
Determinemos o conjunto dos divisores comuns, ou seja, a intersecção entre os conjuntos de divisores:

$$D(36) \cap D(42) = \{1, 2, 3, 6\}$$

Sendo finito o conjunto dos divisores, conclui-se que o conjunto dos divisores comuns também é finito. O mdc entre os números dados é o maior dos divisores comuns aos números dados.

A resposta é a que dona Clara poderia distribuir igualmente os doces com 6 crianças.

O resultado dessa operação de mdc é o *maior divisor comum*.



Determinação do mdc de dois ou mais números

Para se determinar o mdc de dois ou mais números, procede-se da seguinte maneira:

– Decompõe-se os números dados em fatores primos;

– a seguir, forma-se o produto entre os fatores comuns a ambos, utilizando os fatores com menores expoentes.

Exemplificando, teríamos:

– Determinar o mdc(24, 32, 48)

Solução

$$24 = 2^3 \times 3$$
$$32 = 2^5$$
$$48 = 2^4 \times 3$$

Logo: mdc(24, 32, 48) = 2^3 = 8.

Observações

1. O mdc entre dois números em que o maior é múltiplo do menor é o menor deles.

Exemplo

mdc(12, 24) = 12

2. O mdc entre dois números primos entre si é a unidade. É o processo geralmente usado para se saber se dois números quaisquer são primos entre si.

Exemplo

mdc(12, 13) = 1



3. Se multiplicarmos (ou dividirmos) dois ou mais números por um mesmo número, diferente de zero, o maior divisor comum ficará multiplicado (ou dividido) por esse número.

Exemplo

mdc(45, 50) = 5;

Multiplicando-se por 3 teremos:

mdc(135, 150) = 15

Exercício

15. Determine o mdc entre os números a seguir:
    a) 28, 34
    b) 12, 36
    c) 7, 9
    d) 4, 16
    e) 48, 96, 108



MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM: o mmc

De uma certa estação rodoviária saem ônibus para o Paraná de 5h em 5h e para o Mato Grosso de 6h em 6h. Se os ônibus para o Paraná e para o Mato Grosso partiram juntos ao meio-dia, quando eles partirão novamente juntos?

Determinar o mmc entre 5 e 6.

Para tanto, determinemos o conjunto dos múltiplos de cada um, isto é:

$$M(5) = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...\}$$

$$M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...\}$$

e, em seguida, o conjunto dos múltiplos comuns, isto é:

$$M(5) \cap M(6) = \{0, 30, ...\}$$

Como o conjunto dos múltiplos de um número é infinito, e assim não podemos determinar o maior múltiplo comum, haverá então um número que será o *menor múltiplo comum*, diferente de zero, que será denominado Mínimo Múltiplo Comum.

Portanto, concluímos que os ônibus partirão novamente juntos dali a 30 h, ou seja, às 6 h da manhã do dia seguinte.

O resultado da operação de mmc é o *menor múltiplo comum*.

Processo de decomposição simultânea

– Decompomos, simultaneamente, os números dados em fatores primos. Para tanto, traçamos uma reta vertical, onde ficarão os divisores simultâneos. Abaixo de cada número, colocamos o quociente obtido:

Exemplo

24, 32, 48	2
12, 16, 24	2
6, 8, 12	2
3, 4, 6	2
3, 2, 3	2
3, 1, 3	3
1, 1, 1	

- Portanto, o
  $\text{mmc}(24, 32, 48) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \cdot 3 = 96$

- Observe que seguimos a ordem crescente dos números primos {2, 3, 5, 7, 11, ...}, ou seja, começa-se dividindo por 2, se houver números divisíveis por 2, quando não for mais possível dividir por 2, passamos ao 3 (se houver números divisíveis por 3), seguimos com 5, 7, 11, ... assim por diante, até que todos os quocientes sejam 1.

Outro exemplo:

24, 45	2
12, 45	2
6, 45	2
3, 45	3
1, 15	3
1, 5	5
1, 1	

$$\text{mmc}(24, 35) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

DETERMINAÇÃO DO mmc DE DOIS OU MAIS NÚMEROS

Processo da decomposição em fatores primos

Procede-se da seguinte maneira:

- Decompõem-se em fatores primos os números dados;
- a seguir, forma-se o produto entre os fatores comuns e não-comuns, utilizando os fatores com maiores expoentes.

Exemplificando, temos:

Determinar o mmc(24, 32, 48).

Solução

$$24 = 2^3 \times 3$$
$$32 = 2^5$$
$$48 = 2^4 \times 3$$

Logo: $\text{mmc}(24, 32, 48) = 2^5 \cdot 3 = 96$

Observações

1. O mmc entre dois números em que o maior é múltiplo do menor e é o maior deles.

Exemplo

$$mmc(12, 24) = 24$$

2. O mmc entre dois números primos entre si é o produto deles.

Exemplo

$$mmc(12, 13) = 156$$

3. Se multiplicarmos (ou dividirmos) dois ou mais números por um mesmo número diferente de zero, o menor múltiplo comum ficará multiplicado (ou dividido) por esse número.

Exemplo

$$mmc(5, 7) = 35$$
$$mmc(20, 28) = 140$$

Exercícios

16. Determine o mmc entre os seguintes números:
   a) 28, 34
   b) 12, 36
   c) 7, 9
   d) 4, 16
   e) 48, 96, 108

Respostas

1. a) (1, 16), (2, 8), (4, 4), (8, 2), (1, 1)
   b) (1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6), (6, 4), (8, 3), (12, 2), (24, 1)
   c) (1, 32), (2, 16), (4, 8), (8, 4), (16, 2), (32, 1)
   D(16) = 1, 2, 4, 8, 16
   D(24) = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
   D(32) = 1, 2, 4, 8, 16, 32

2. a) V b) V c) F

3. b, d, e

4.

x	3	6	9	12	15	18	21
2x	6	12	18	24	30	36	42

5. São pares

6. b, d, e

7. b, e, f. Resposta pessoal

8.

x	2	4	6	8	10	12
3x	6	12	18	24	30	36

9. b, d, f

10. a, d, e, g, h. Resposta pessoal

11. a, b, e

12. a, c

13. a) $42 = 2 \times 3 \times 7$

b) $98 = 2 \times 7^2$

c) $44 = 2^2 \times 11$

d) $35 = 5 \times 7$

14. c) $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

15. a) 2 d) 4

b) 12 e) 12

c) 1

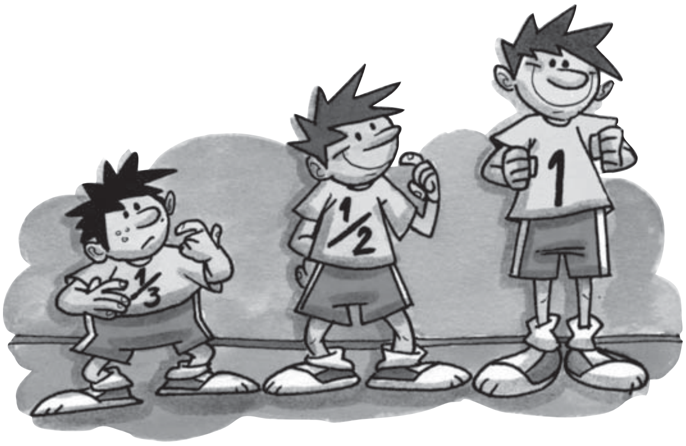
16. a) 952 d) 6

b) 36 e) 864

c) 63



Capítulo 5



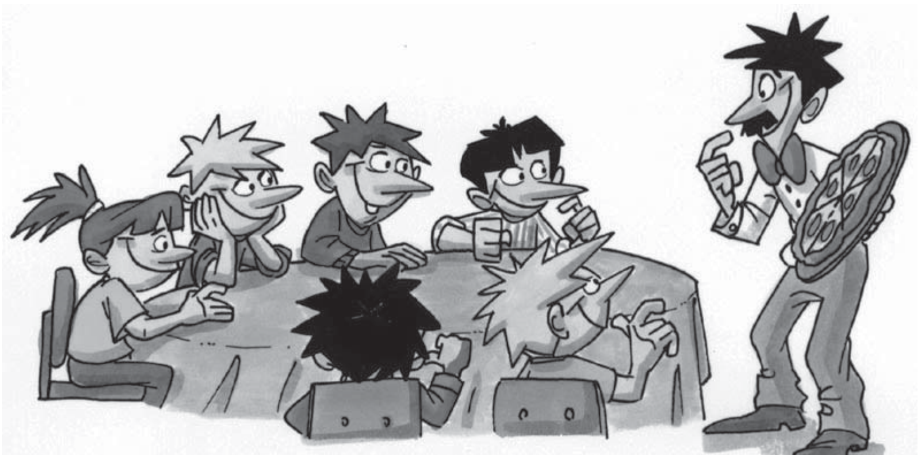
OS NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA

Suponhamos que um garçom tenha de dividir igualmente uma pizza entre seis pessoas. Assim sendo, a pizza toda é um inteiro e cada uma das partes em que ficar dividida será representada pelo número fracionário: $\frac{1}{6}$,

que se lê: um sexto

O número $\frac{1}{6}$ é chamado de *fração*.

Os *termos* da fração, nesse exemplo 1 e 6 são chamados de *numerador* e *denominador* respectivamente.



Vamos considerar agora as figuras a seguir:

Exemplos

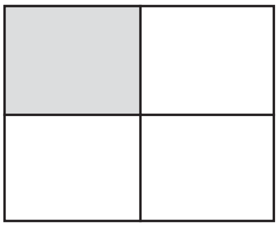


Figura 1

A figura 1 está dividida em 4 partes.

A parte pintada corresponde a $\frac{1}{4}$ da figura.

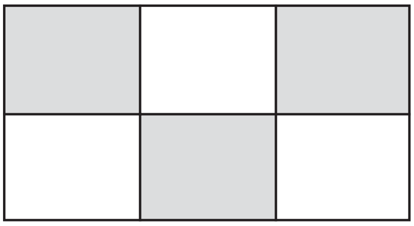


Figura 2

A figura 2 foi dividida em 6 partes.

A parte pintada corresponde a $\frac{3}{6}$ da figura.

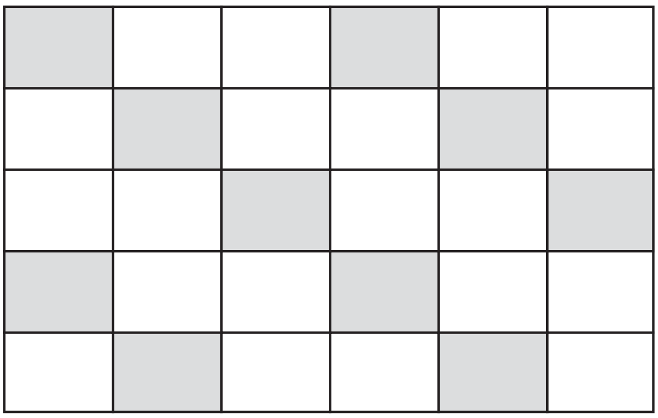


Figura 3

A figura 3 foi dividida em 30 partes.

A parte pintada corresponde a $\frac{10}{30}$ da figura.

Como ler as frações?

Denominador:	Lê-se:
2	Meio
3	Terço
4	Quarto
5	Quinto
6	Sexto
7	Sétimo
8	Oitavo
9	Nono
10	Décimo
100	Centésimo
1.000	Milésimo

Exemplos

$\frac{3}{2} \rightarrow$ três meios

$\frac{2}{7} \rightarrow$ dois sétimos

$\frac{5}{9} \rightarrow$ cinco nonos

$\frac{54}{1.000} \rightarrow$ cinqüenta e quatro milésimos

Se o denominador for maior que o numerador, lemos da seguinte maneira:

$\frac{3}{13} \rightarrow$ três treze avos.

$\frac{5}{25} \rightarrow$ cinco vinte e cinco avos.

Exercícios

1. A qual fração corresponde as seguintes setenças:
   a) um dia em um mês de 30 dias.
   b) um mês em um ano.
   c) uma década em um século.

2. Escreva como se lê:
   a) $\frac{2}{13}$ c) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{7}{3}$
   b) $\frac{14}{100}$ d) $\frac{35}{1.000}$

3. Luísa tinha em sua geladeira 6 maças, 4 bananas e 2 mamões. Ela fez uma vitamina e usou $\frac{1}{3}$ das maças, $\frac{3}{4}$ das bananas e $\frac{1}{2}$ dos mamões. Quantas frutas de cada ela usou?

Classificação das frações



- *Frações próprias:*

  Quando o numerador for menor do que o denominador.

  Exemplificando: $\frac{2}{7}$

- *Frações impróprias:*

  Quando o numerador for maior do que o denominador.

  Exemplificando: $\frac{5}{3}$

- *Frações aparentes:*

  Quando o numerador for múltiplo do denominador.

  Exemplificando: $\frac{16}{4}$

Conclusão:

Qualquer número natural poderá ser expresso por um número racional, onde o denominador (segundo elemento do par) é a unidade.

Exemplos: $4 = \frac{4}{1}$; $7 = \frac{7}{1}$

Com isso podemos concluir que o conjunto dos números naturais, representado por ℕ, *está contido* no conjunto dos números racionais, representado por ℚ, ou em notação de conjunto:

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{Q}$$

Propriedades das frações

1. Se multiplicarmos (ou dividirmos) o numerador de uma fração por um número qualquer, diferente de zero, o valor da fração ficará multiplicado (ou dividido) por esse número.

Exemplo

Se multiplicarmos o numerador da fração $\frac{3}{7}$ por 2, obteremos $\frac{6}{7}$, que será duas vezes maior do que $\frac{3}{7}$.

Caso dividamos o numerador por 3, obteremos $\frac{1}{7}$, que será três vezes menor do que $\frac{3}{7}$.

2. Se multiplicarmos (ou dividirmos) o denominador de uma fração por um número qualquer, diferente de zero, o valor de fração ficará dividido (ou multiplicado) por esse número.

Exemplo

Se multiplicarmos o denominador da fração $\frac{3}{8}$ por 2, obteremos $\frac{3}{16}$, que é duas vezes menor do que $\frac{3}{8}$.

3. Se multiplicarmos (ou dividirmos) ambos os membros de uma fração por um mesmo número diferente de zero, o valor da fração não se altera.

Exemplo

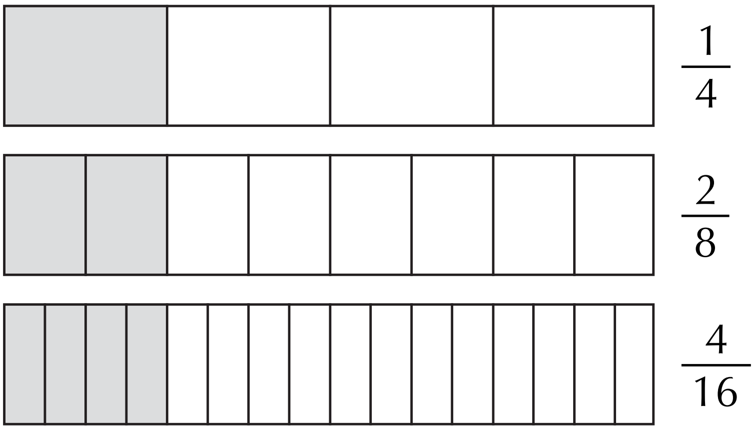


Se multiplicarmos sucessivamente o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{4}$ por 2, teremos:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16} \ldots.$$

essas frações são chamadas *frações equivalentes*.

Vamos conferir na prática?



Podemos observar que a mesma porção da figura foi pintada.

Extração de inteiros – números mistos

Para extrair os inteiros de uma *fração imprópria*, basta dividirmos o numerador pelo denominador. O quociente assim obtido constituirá a parte inteira da fração imprópria, a qual terá para parte fracionária um par formado da seguinte maneira:



- para numerador, o resto e
- para denominador, o divisor.

Exemplo

Seja o número $\frac{17}{3}$. Efetuando-se a divisão temos $17 \underline{|3}$; 2 5

portanto, $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$; o qual é chamado de *número misto*.

Para transformar um número misto em fração imprópria, devemos formar uma fração que possua, para numerador, o produto entre a parte inteira e o denominador da parte fracionária, mais o numerador desta; e, para denominador o denominador, dela.

Seja:

$$5\frac{2}{3} = \frac{5 \times 3 + 2}{3} = \frac{15 + 2}{3} = \frac{17}{3}$$

portanto, $5\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$

Exercícios

4. Para as frações a seguir, escreva duas frações equivalentes:

   Exemplo: $\frac{11}{22}$; $\frac{22}{44}$; $\frac{33}{66}$

   a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{15}$

5. Classifique as frações a seguir como próprias, impróprias, aparentes.

   a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{21}{8}$ d) $\frac{10}{5}$ e) $\frac{4}{5}$ f) $\frac{4}{2}$

6. Transforme as frações impróprias em números mistos:

   a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{25}{13}$

7. Transforme os números mistos em frações impróprias:

   a) $5\frac{1}{2}$ b) $3\frac{5}{6}$ c) $7\frac{1}{8}$

Simplificação de frações

Para simplificar uma fração, basta dividirmos ambos os membros pelo máximo divisor comum entre eles. Assim, temos:

$$\frac{24}{27} \rightarrow \text{mdc}(24,\ 27) = 3 \rightarrow \frac{24 : 3}{27 : 3} = \frac{8}{9}$$

A fração $\frac{8}{9}$ assim obtida é chamada de *fração irredutível*.

Redução de frações ao mesmo denominador

Para reduzir frações ao mesmo denominador, extrai-se o mmc entre os denominadores, o qual será o denominador comum. A seguir, divide-se o mmc obtido pelo denominador de cada uma das frações, e o resultado obtido multiplica-se pelo numerador – ou seja: constroem-se frações equivalentes às frações dadas.

Exemplificando, temos:

- reduzir as frações abaixo ao mesmo denominador:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$$

mmc(3, 4, 5) = 60

$$\frac{(60 : 3) \times 2}{60}, \frac{(60 : 4) \times 3}{60}, \frac{(60 : 5) \times 4}{60}$$

- resultando em:

$$\frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}$$

As frações assim obtidas são chamadas de *homogêneas*, pois possuem os mesmos denominadores.

Exercícios

8. Simplifique as frações:

a) $\frac{2}{4}$

b) $\frac{5}{25}$

c) $\frac{3}{12}$

d) $\frac{7}{49}$

9. Reduza ao mesmo denominador as frações:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}$

b) $\frac{2}{5}, \frac{1}{7}, \frac{3}{13}$

Comparação de frações

Para comparar duas ou mais frações, devemos determinar uma relação de igualdade ou desigualdade entre elas.

Assim sendo, devemos considerar os seguintes casos:

- *Frações com o mesmo denominador*.

Será maior a que tiver o maior numerador.



Exemplo

$$\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$$

- *Frações com numeradores e denominadores diferentes*.

Exemplo

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \text{ e } \frac{4}{5}$$

O primeiro passo é reduzir as frações ao mesmo denominador.

$$\text{mmc}(5, 3, 4) = 60 \rightarrow \frac{48}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}$$

E então proceder a comparação:

$$\frac{40}{60} < \frac{45}{60} < \frac{48}{60} \rightarrow \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

Exercício

10. Preencha as lacunas com >, < ou =

a) $\frac{3}{2}$ ..... $\frac{6}{8}$

b) $\frac{1}{2}$ ..... $\frac{5}{4}$

c) $\frac{1}{3}$ ..... $\frac{10}{4}$

d) $\frac{15}{7}$ ..... $\frac{30}{14}$

Operações com frações

1. *Adição de frações*

Primeiro caso: frações com o mesmo denominador

Neste caso, conserva-se o denominador comum e adicionam-se os numeradores. Assim, temos:

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2+1}{7} = \frac{3}{7}$$

Segundo caso: frações com denominadores diferentes

Neste caso, determina-se o mmc entre os denominadores, reduzindo as frações aos mesmos denominadores, e recai-se no primeiro caso. Assim, temos:

$$\text{mmc}(3, 5) = 15$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{10+9}{15} = \frac{19}{15}$$

2. *Subtração de frações*

Primeiro caso: frações com o mesmo denominador

Neste caso, conserva-se o denominador comum e subtraem-se os numeradores. Assim, temos:

$$\frac{2}{7} - \frac{1}{7} = \frac{2-1}{7} = \frac{1}{7}$$

Segundo caso: frações com denominadores diferentes

Neste caso, determina-se o mmc entre os denominadores, reduzindo as frações aos mesmos denominadores, e recai-se no primeiro caso. Assim, temos:

$$\text{mmc}(3,\ 5) = 15$$

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{10-9}{15} = \frac{1}{15}$$

3. *Multiplicação de frações*

Para multiplicar várias frações, devemos formar uma nova fração que terá, para numerador, o produto dos numeradores; para denominador, o produto dos denominadores. Assim, temos:

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times 5 \times 1}{3 \times 7 \times 3} = \frac{10}{63}$$

4. *Divisão entre frações*

Para dividir uma fração por outra, conservamos a primeira fração e multiplicamos pela inversa da segunda fração. Assim, temos:

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

5. *Potenciação de frações*

Para resolver a potenciação de uma fração, devemos elevar tanto o numerador como o denominador à potência indicada. Assim, temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

6. *Radiciação de frações*

Para resolver a radiciação de uma fração, devemos extrair a raiz indicada tanto do numerador como do denominador. Assim, temos:

$$\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$$

Exercício

11. Resolva as seguintes operações:

a) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$

b) $1 + \frac{1}{5}$

c) $1 - \frac{1}{5}$

d) $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$

e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$

f) $\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{9}$

g) $6 : \frac{5}{7}$

h) $\frac{12}{4} \cdot \frac{1}{3}$

i) $\frac{3}{5} : \frac{7}{11}$

j) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}$

l) $\sqrt{\frac{9}{16}} - \frac{3}{4}$

m) $8 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Propriedades das frações



1. *Comutativa*:

a) Adição: $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{2}{3}$

b) Multiplicação: $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{7}{5} \times \frac{2}{3}$

2. *Elemento neutro*:

a) Adição: é o zero → $\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$

b) Multiplicação: é o um → $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$

3. *Associativa*:

a) Adição: $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{7} = \frac{2}{3} + \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{7}\right)$

b) Multiplicação: $\left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{7} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{7}\right)$

Desafio

Resolva as seguintes expressões fracionárias:

Exemplos

1) $\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\right]-\frac{7}{10}$

$=\left[\left(\frac{15+8}{20}\right)-\left(\frac{5-2}{10}\right)\right]-\frac{7}{10}$

$=\left[\frac{23}{20}-\frac{3}{10}\right]-\frac{7}{10}$

$=\frac{23-6}{20}-\frac{7}{10}$

$=\frac{17}{20}-\frac{7}{10}$

$=\frac{17-14}{20}$

$=\frac{3}{20}$

2) $\left\{\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2\right]-\frac{5}{12}\right\}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

$=\left\{1+\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{3-2}{6}\right)^2\right]-\frac{5}{12}\right\}-\left(\frac{4-3}{12}\right)$

$=\left\{1+\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{36}\right]-\frac{5}{12}\right\}-\left(\frac{1}{12}\right)$

$=\left\{1+\frac{12-1}{36}-\frac{5}{12}\right\}-\frac{1}{12}$

$=\left\{\frac{36+11-15}{36}\right\}-\frac{1}{12}$

$=\frac{32-3}{36}$

$=\frac{29}{36}$



a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{7} \times \frac{3}{5}$

b) $\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right) - \frac{2}{5}$

c) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{7}\right) - \left(2\frac{3}{7} - \frac{7}{3}\right)$

d) $\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{7}\right) + 2\frac{1}{7}\right] - \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{21}\right)$

e) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{21}{2} + \frac{5}{3}\right)$

f) $\left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}\right) : \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}\right)$

Problemas com frações

Exemplos

1. Distribuir uma herança de R$ 20.000,00 entre três herdeiros, de tal modo que o primeiro receba $\frac{2}{5}$ da herança, e os outros dois recebam quantias iguais. Quanto receberá cada um?

Solução

Herança → R$ 20.000,00

Primeiro herdeiro → $\frac{2}{5}$ de R$ 20.000,00

Segundo herdeiro = Terceiro herdeiro

Logo: Primeiro → $\frac{2}{5}$ de 20.000 = $\frac{2}{5} \times 20.000 = 8.000$

Portanto: 20.000 − 8.000 = 12.000

Segundo = Terceiro → 12.000 : 2 = 6.000

Conclusão:

Primeiro herdeiro → R$ 8.000,00

Segundo herdeiro → R$ 6.000,00

Terceiro herdeiro → R$ 6.000,00



2. Sabendo-se que $\frac{2}{3}$ de um valor em dinheiro corresponde a R$ 30.000,00, pergunta-se: qual é o valor total em dinheiro?

Solução

$$\frac{2}{3} = 30.000,00$$

Então:

$$\frac{1}{3} = 15.000,00$$

Portanto:

$$\frac{3}{3} = 3 \times 15.000,00 = 45.000,00$$

Logo: a quantia procurada é R$ 45.000,00.

3. Se um trem percorreu $\frac{3}{5}$ de um trecho de uma estrada de ferro, cuja distância entre os extremos é de 300 km, pergunta-se: quantos quilômetros faltam ainda para se chegar ao outro extremo?

Solução

$$\frac{5}{5} \rightarrow 300 \text{ km}$$

Então:

$$\frac{1}{5} \rightarrow \frac{300}{5} = 60 \text{ km}$$

Se andou $\frac{3}{5}$, faltam ainda: $\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

o que equivale a: $\frac{2}{5} = 2 \times \frac{1}{5} = 2 \times 60 = 120$ km

4. Clariza possuía a quantia de R$ 360,00. Se gastou $\frac{1}{5}$ na compra de livros escolares e na farmácia $\frac{1}{4}$ do restante, pergunta-se: com quanto Clariza ainda ficou?

Solução

$$\frac{5}{5} \rightarrow 360{,}00$$

Logo:

$\frac{1}{5} = \frac{360{,}00}{5} = 72{,}00$ (na livraria)

Possuía ainda:

360,00 − 72,00 = 288,00

Gastou na farmácia → $\frac{1}{4}$ de 288,00

ou seja: $\frac{1}{4} \times 288 = 72{,}00$

Conclusão:

Gastou na livraria: R$ 72,00

Gastou na farmácia: R$ 72,00

Ficou ainda com:

360,00 − (72,00 + 72,00) = R$ 216,00



Exercícios

13. Resolva os seguintes problemas:

a) $\frac{2}{3}$ do preço de um objeto vale R$ 28,00. Qual o preço do objeto?

b) Qual é menor?

1) $\frac{2}{3}$ de R$ 36,00   2) $\frac{3}{5}$ de R$ 105,00

c) Uma torneira leva 20 minutos para encher $\frac{2}{5}$ de um reservatório, cuja capacidade é 180.000 litros. Qual o tempo necessário para enchê-lo completamente?

d) Um reservatório contém $\frac{288}{7}$ litros de álcool. Deseja-se encher vasilhames cuja capacidade seja de $\frac{3}{7}$ litros cada um. Pergunta-se: quantos vasilhames poderão ser preenchidos e qual a fração de litro que sobrará, caso haja?

e) Para se construir os $\frac{3}{5}$ de uma aeronave gastou-se R$ 360.000,00. Pergunta-se qual a quantia necessária para concluir a construção da aeronave e qual a fração correspondente para a sua conclusão.

Respostas

1. a) $\frac{1}{30}$ b) $\frac{1}{12}$
   c) $\frac{1}{10}$

2. a) dois treze avos.
   b) quatorze centésimos.
   c) um quinto.
   d) trinta e cinco milésimos.
   e) sete terços.

3. 2 maçãs, 3 bananas e 1 mamão

4. a) $\frac{10}{8}$; $\frac{15}{12}$
   b) $\frac{3}{6}$; $\frac{12}{24}$
   c) $\frac{21}{105}$; $\frac{30}{150}$

5\. a) própria
b) imprópria
c) imprópria
d) aparente
e) própria
f) aparente

6\. a) $2\frac{1}{3}$
b) $1\frac{1}{2}$
c) $1\frac{12}{13}$

7\. a) $\frac{11}{2}$
b) $\frac{23}{6}$
c) $\frac{57}{8}$

8\. a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{7}$

9\. a) $\frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{15}{12}$
b) $\frac{182}{455}, \frac{65}{455}, \frac{105}{455}$

10\. a) $>$
b) $<$
c) $<$
d) $=$

11\. a) $\frac{19}{12}$
b) $\frac{6}{5}$
c) $\frac{4}{5}$
d) $\frac{5}{8}$
e) $\frac{8}{15}$
f) $\frac{20}{27}$
g) $\frac{42}{5}$
h) 1
i) $\frac{33}{35}$
j) $\frac{25}{36}$
l) 0
m) $\frac{63}{8}$

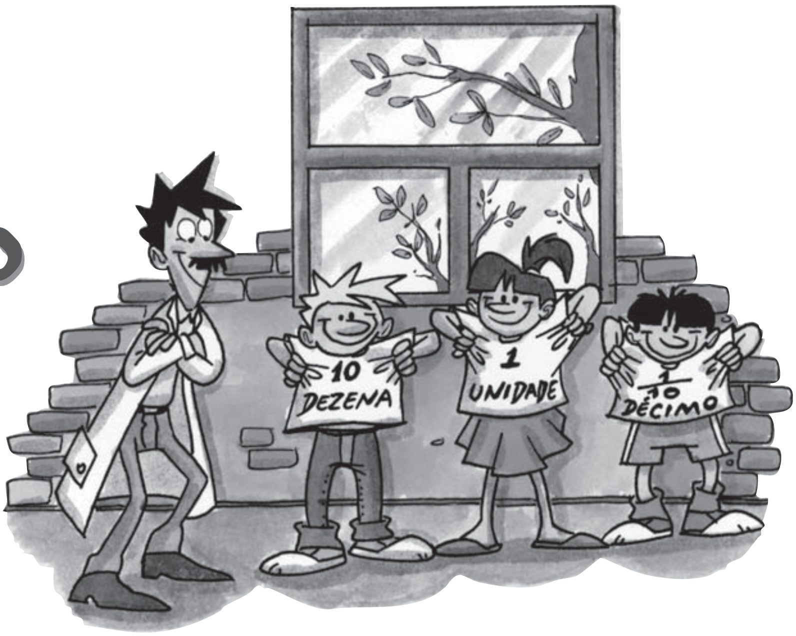
12\. **Desafio**

a) $\frac{17}{35}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{5}{7}$
d) $\frac{23}{21}$
e) $\frac{184}{15}$
f) $\frac{3}{7}$

13\. a) R$ 42,00
b) $\frac{2}{3}$ de R$ 36,00
c) 50 minutos
d) 96 vasilhames exatamente
e) R$ 240.000,00; restam ainda $\frac{2}{5}$



Capítulo 6



OS NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA DECIMAL

Todo número racional representado em notação decimal é chamado de *número decimal*.

No capítulo anterior vimos que $\frac{1}{10}$, lê-se um décimo, representava uma unidade dividida em 10 partes. A forma decimal desta fração é dada por:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 10 \\ \hline -0 & 0{,}1 \\ \hline 10 & \\ 0 & \end{array}$$

Portanto $\frac{1}{10} = 0{,}1$.

Podemos concluir que os números na forma decimal são uma outra maneira de representação para os números na forma fracionária. Como veremos a seguir, essa forma de representação oferece vantagens pois torna mais simples realizar operações, comparações etc.

Leitura dos números decimais



Primeiramente, lê-se a parte inteira (caso haja), seguida do nome de *unidades* e depois a parte decimal, seguida da posição decimal de seu último algarismo da direita de acordo com o esquema a seguir.

Parte inteira		Parte decimal
Milhar centena dezena unidade	,	Décimo centésimo milésimo

Exemplos

93,45 – Noventa e três unidades e quarenta e cinco centésimos.

1,785 – Uma unidade e setecentos e oitenta e cinco milésimos.

Transformação de fração decimal em número decimal

Seja, por exemplo, a fração decimal: $\frac{27.342}{1.000}$, a qual será igual "ao número decimal que obteremos, escrevendo-se o numerador da fração e, após, separando-se com uma vírgula, a partir da direita, tantas casas decimais quantos são os zeros que constam no denominador".

Ou seja:

$$\frac{27.342}{1.000} = 27,342$$

Caso o numerador da fração contenha número de algarismos menor do que o número de algarismos contidos no deno-

minador, acrescenta-se à sua esquerda tantos zeros quantos forem necessários para poder se igualar à fração dada.

Exemplificando, temos:

$$\frac{27}{100} = 0{,}27\ ;\quad \frac{3}{1.000} = 0{,}003$$

Transformação de número decimal em fração decimal

Seja, por exemplo, o seguinte número decimal: 27,342, o qual será igual "a uma fração decimal, na qual o numerador é formado pelo número proposto sem a vírgula e para denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos forem as casas decimais".

Ou seja: $$27{,}342 = \frac{27.342}{1.000}$$

Propriedades dos números decimais

Primeira propriedade:

"Um número decimal não se altera quando acrescenta-se ou retira-se um ou mais zeros de sua parte decimal".

Exemplificando, temos:

$$0{,}7 = 0{,}70 = 0{,}700 = 0{,}7000 = \ldots$$

Segunda propriedade:

"Quando se deseja multiplicar um número decimal por 10; 100; 1.000... basta deslocarmos a vírgula para a direita de uma, duas, três... casas decimais, conforme o número de zeros do fator multiplicador.

Exemplificando, temos:

$$27{,}342 \times 10 = 273{,}42$$
$$27{,}342 \times 100 = 2.734{,}2$$
$$27{,}342 \times 1.000 = 27.342$$
$$27{,}342 \times 10.000 = 273.420$$

Terceira propriedade:

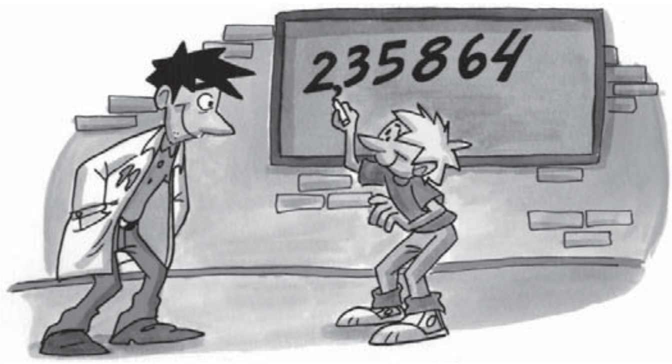
"Quando se deseja dividir um número decimal por 10; 100; 1.000... basta deslocarmos a vírgula para a esquerda de uma, duas, três... casas decimais conforme o número de zeros do divisor".

Exemplificando, temos:

27,342 : 10 = 2,7342

27,342 : 100 = 0,27342

27,342 : 1.000 = 0,027342



Exercícios

1. A tabela a seguir mostra quanto pesa a bola nos diferentes esportes:

Esporte	*Peso*
Boliche	7,25 kg
Golfe	45,9 g
Squash	23,3 g
Tênis	56,71 g
Tênis de mesa	2,53 g



Escreva como se lê os números da tabela anterior.

Em seguida transforme esses números decimais em frações decimais.

Exemplo: $7{,}25 = \frac{725}{100}$

2. Represente na forma de números decimais as seguintes frações decimais:

a) $\frac{27}{10}$ b) $\frac{372}{10}$

c) $\frac{2.743}{100}$ d) $\frac{2}{100}$

e) $\frac{3.388}{1.000}$ f) $\frac{8.432}{1.000}$

g) $\frac{47.324}{100}$ h) $\frac{47.101}{1.000}$

3. Represente na forma de frações decimais os seguintes números decimais:

a) 43,27
b) 3,28
c) 273,1
d) 0,43
e) 0,03
f) 1,272
g) 412,28
h) 32,21

Operações com números decimais

Adição e subtração

Na *adição* e *subtração* de números decimais, devemos escrevê-los um sobre o outro, de tal modo que as vírgulas se posicionem numa mesma coluna, após as quais igualaremos as casas decimais, completando-as com "zeros".

Calcular:

I. 13,273 + 2,48

$$\begin{array}{r} 13{,}273 \\ 2{,}480+ \\ \hline 15{,}753 \end{array}$$

II. 13,273 − 2,48

$$\begin{array}{r} 13{,}273 \\ 2{,}480- \\ \hline 10{,}793 \end{array}$$



Exercícios

4. Em uma competição de atletismo, os corredores fizeram os tempos mostrados na tabela a seguir. Ganha a competição quem realizar a prova em menos tempo.

Tempo	*Tempo em Segundos*			
	1ª volta	*2ª volta*	*3ª volta*	*Total*
Claudia	75,24	68,36	72,95	
Gilberto	52,41	55,87	53,30	
Sebastião	62,94	64,36	59,40	
Juliana	40,02	45,17	42,13	

Quem ganhou a prova?

5. Efetue as seguintes subtrações:
   a) 31,4 − 2,83
   b) 7,4 − 2,27
   c) 312,21 − 1,3
   d) 32,43 − 27,3

Multiplicação

Para multiplicar dois números decimais, considere-os como se fossem números naturais, e após obtermos o produto levaremos em conta as casas decimais, tanto as do multiplicando como as do multiplicador.

Calcular: 243,5 × 2,53

1 "casa" + 2 "casas" → 3 "casas"

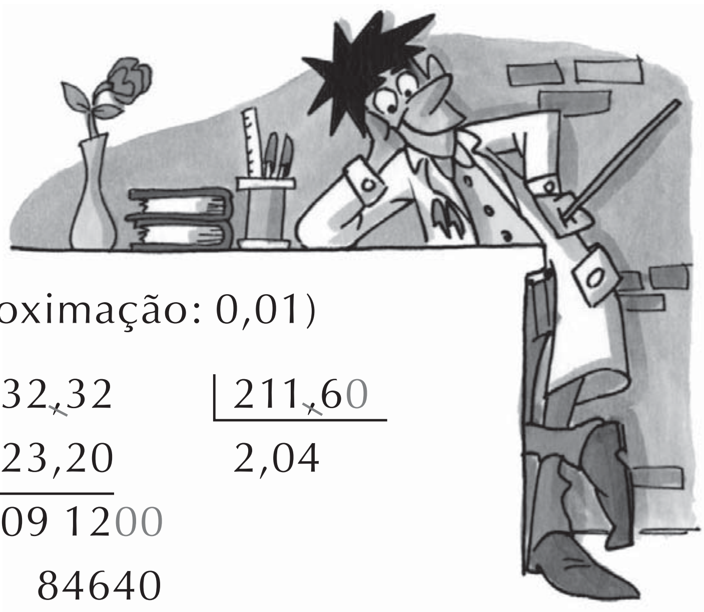
$$
\begin{array}{r}
243{,}5 \\
2{,}53\ \times \\
\hline
7305 \\
12175 \\
4870 \\
\hline
616{,}055
\end{array}
$$



Divisão

A divisão se faz reduzindo-se tanto o dividendo como o divisor a numerais contendo o mesmo número de casas decimais; a seguir, cortam-se as vírgulas, após o que efetua-se a operação como se eles fossem números naturais.

Veja os exemplos:



I. 432,32 : 211,6 (aproximação: 0,01)

```
  432,32    | 211,60
− 423,20      2,04
  009 1200
     84640
     06560
```

Como o resto é diferente de zero poderíamos continuar dividindo, mas como a aproximação pedida indica 0,01, ou seja, duas casas decimais paramos nesse ponto.

II. 2,3 : 11,42 (aproximação: 0,001)

```
  2,30    | 11,42
−    0      0,201
   2300
   2284
   001600
  − 1142
     0458
```

Da mesma maneira que no exemplo anterior paramos quando chegamos na terceira casa decimal, ou seja, 0,001.

Convertendo quaisquer frações em números decimais

Para realizar a conversão de uma fração qualquer em um número decimal, basta realizar a divisão do numerador pelo denominador.

Veja os exemplos:

I. $\frac{18}{75} \rightarrow 18 : 75 \rightarrow$

$$
\begin{array}{r|l}
18 & 75 \\
\underline{-\ \ 0} & 0{,}24 \\
180 & \\
\underline{-150} & \\
300 & \\
\underline{-300} & \\
0 &
\end{array}
$$

Portanto $\frac{18}{75} = 0{,}24$

Como o resto da divisão foi zero, o quociente obtido é um decimal exato.



II. $\frac{7}{6} \rightarrow 7 : 6 \rightarrow$

$$
\begin{array}{r|l}
7 & 6 \\
\underline{-\ 6} & 1{,}1666... \\
10 & \\
\underline{-\ 6} & \\
40 & \\
\underline{-36} & \\
40 & \\
\underline{-36} & \\
4 &
\end{array}
$$

Portanto $\frac{7}{6} = 1{,}1666...$

Como o resto da divisão é diferente de zero, o quociente obtido é um decimal não exato. Além disso, como sempre resta quatro, o algarismo 6 se repetirá indefinidamente no quociente, portanto o número decimal 1,1666 é chamado de *dízima periódica*.

Exercício

6. A tabela a seguir mostra os preços de alguns produtos de uma "cesta básica":

Produto	*Quantidade*	*Preço*
Carne	2 kg	9,34
Sardinha	4 latas	4,92
Ovos	3 dúzias	4,35
Arroz	5 kg	5,10
Feijão	2 kg	4,84

Se os preços nas quantidades indicadas são os apresentados, qual o valor de 1 unidade de cada (1 kg, 1 lata, 1 dúzia)?

Se for montada uma "cesta básica" diferente com 3 kg de carne, 2 latas de sardinha, 1 dúzia de ovos, 3 kg de arroz e 1 kg de feijão, quanto esta nova "cesta básica" custará?



Respostas

1. 7,25 ⇒ sete unidades e vinte e cinco centésimos
   45,9 ⇒ quarenta e cinco unidades e nove décimos
   23,3 ⇒ vinte e três unidades e três décimos
   56,71 ⇒ cinqüenta e seis unidades e setenta e um centésimos
   2,53 ⇒ duas unidades e cinqüenta e três centésimos

   $7,25 = \frac{725}{100}$

   $45,9 = \frac{459}{10}$

   $23,3 = \frac{233}{10}$

   $56,71 = \frac{5.671}{100}$

   $2,53 = \frac{253}{100}$

2. a) 2,7 b) 37,2 c) 27,43 d) 0,02 e) 3,388 f) 8,432 g) 474,32 h) 47,101

3. a) $\frac{4.327}{100}$ b) $\frac{328}{100}$ c) $\frac{2.731}{10}$ d) $\frac{43}{100}$ e) $\frac{3}{100}$ f) $\frac{1.272}{1.000}$ g) $\frac{41.228}{100}$ h) $\frac{3.221}{100}$

4. Cláudia: 216,55
   Gilberto: 161,58
   Sebastião: 186,70
   Juliana: 127,32
   Juliana venceu a prova

5. a) 28,57 b) 5,13 c) 310,91 d) 5,13

6. Carne R$ 4,67
   Sardinha R$ 1,23
   Ovos R$ 1,45
   Arroz R$ 1,02
   Feijão R$ 2,37

   A nova "cesta básica" custará R$ 23,35.



Capítulo 7



SISTEMA DE MEDIDAS

Depois de aprender a contar objetos, outra necessidade surgiu: a de medir.

Em nosso dia-a-dia estamos sempre tendo que responder a perguntas, tais como:

- Qual a distância da sua casa à escola?
- Qual o peso dessa mochila? Parece que está cheia de chumbo?
- Qual a capacidade dessa garrafa térmica?

São situações do cotidiano que podem ser respondidas usando-se uma unidade de medida chamada *padrão* e comparando-se o que se deseja medir com esse padrão.

No Brasil, adota-se o *sistema métrico decimal*, cuja unidade fundamental é o metro (m).

UNIDADES DE COMPRIMENTO

Múltiplos
- quilômetro → km → 1.000 m
- hectômetro → hm → 100 m
- decâmetro → dam → 10 m

Fundamental → metro → m → 1 m

$$\text{Submúltiplos}\begin{cases}\text{decímetro} \rightarrow \text{dm} \rightarrow 0{,}1\\ \text{centímetro} \rightarrow \text{cm} \rightarrow 0{,}01\\ \text{milímetro} \rightarrow \text{mm} \rightarrow 0{,}001\end{cases}$$

Esquematicamente

$$\text{km} \xleftarrow{\div 10} \text{hm} \xleftarrow{\div 10} \text{dam} \xleftarrow{\div 10} \text{m} \xrightarrow{\times 10} \text{dm} \xrightarrow{\times 10} \text{cm} \xrightarrow{\times 10} \text{mm}$$

Os pontos mais alto e mais baixo do mundo



O ponto mais baixo do mundo se localiza no fundo do mar. Se chama Fossa das Marianas e está a aproximadamente 11.000 m ou 11 km da superfície do oceano

O ponto mais alto do mundo se localiza no continente asiático. Se chama Monte Everest e está a 8.848 m de altura em relação ao nível do mar.



Mudança de unidade

Para mudar de uma unidade para outra, deslocaremos a vírgula para a direita (quando for de uma unidade superior para outra inferior) ou para a esquerda (quando for de uma unidade inferior para outra superior).

Exemplificando, temos:

a) Exprimir 32,74 km em metros.
Logo: 32,74 km = 327,4 hm = 3.274 dam = 32.740 m,

b) Exprimir 327,4 dm em dam.
Logo: 327,4 dm = 32,74 m = 3,274 dam

Exercícios

1. Escreva em forma decimal as seguintes medidas, exprimindo-as em metros:
   a) 3 km + 12 dm
   b) 7 hm + 273 cm
   c) 28 dam + 1 dm
   d) 20 dm + 8 mm

2. Efetue as operações indicadas e exprima as respostas em hm.
   a) 38,23 dm + 742,8 hm
   b) 4,73 km − 12,374 m
   c) 4.217,3 dm + 32,341 m − − 8.274,13 cm
   d) 8.274,13 cm × 100 m

UNIDADES DE SUPERFÍCIE



Área é a medida de uma superfície.

A unidade fundamental de medida de superfície é o metro quadrado (m^2).

Múltiplos:
- quilômetro quadrado → km^2 → 1.000.000 m^2
- hectômetro quadrado → hm^2 → 10.000 m^2
- decâmetro quadrado → dam^2 → 100 m^2

Fundamental → metro quadrado → m^2 → 1 m^2

Submúltiplos:
- decímetro quadrado → dm^2 → 0,01 m^2
- centímetro quadrado → cm^2 → 0,0001 m^2
- milímetro quadrado → mm^2 → 0,000001 m^2

Esquematicamente

$$km^2 \xleftarrow{\div 100} hm^2 \xleftarrow{\div 100} dam^2 \xleftarrow{\div 100} m^2 \xrightarrow{\times 100} dm^2 \xrightarrow{\times 100} cm^2 \xrightarrow{\times 100} mm^2$$

A área de alguns estados do nosso país:

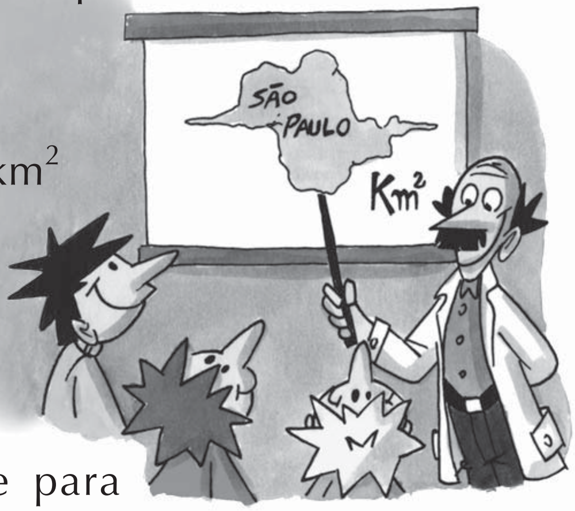
São Paulo: 248.255,7 km^2

Goiás: 340.165,9 km^2

Rio Grande do Norte: 53.166 km^2

Santa Catarina: 95.318,3 km^2

Acre: 153.697,5 km^2



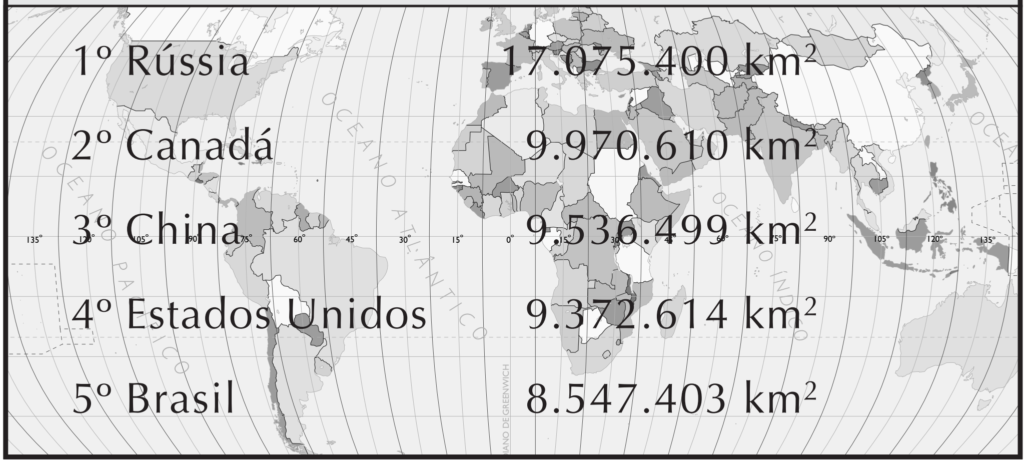
Mudança de unidade

Para mudar de uma unidade para outra, deslocamos a vírgula duas casas para a esquerda ou para a direita, conforme se queira uma unidade superior ou inferior.

Exemplificando, temos:

a) Exprimir 372,27 cm^2 em m^2.
   Logo: 372,27 cm^2 = 3,7227 dm^2 = 0,037227m^2

b) Exprimir 473,23 dam^2 em dm^2.
   Logo: 473,23 dam^2 = 47.323 m^2 = 4.732.300 dm^2



Os cinco maiores países do mundo	
1º Rússia	17.075.400 km^2
2º Canadá	9.970.610 km^2
3º China	9.536.499 km^2
4º Estados Unidos	9.372.614 km^2
5º Brasil	8.547.403 km^2

Unidades agrárias

Nas medições de grandes lotes de terra, são usadas medidas agrárias.

São elas:

hectare → ha → 1 ha = 1 hm^2

are → a → 1 a = 1 dam^2

centiare → ca → 1 ca = 1 m^2



Exercícios

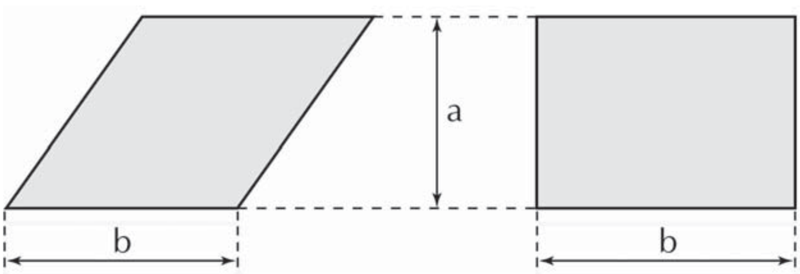
3. Escreva, em forma decimal, as seguintes medidas, exprimindo-as em metros quadrados.
   a) 48 km^2 + 36 dam^2
   b) 27 dam^2 + 16 dm^2
   c) 26 dm^2 + 7 cm^2
   d) 2 dam^2 + 28 dm^2
4. Efetue as operações indicadas e exprima as respostas em dam^2.
   a) 32,18 dam^2 + 374,35 m^2
   b) 83,42 m^2 − 753,43 dm^2
   c) 138 ha + 72 a − 3.628 ca
   d) 2,38 km^2 + 1,07 km^2

Área das principais figuras planas

1. Paralelogramo – retângulo

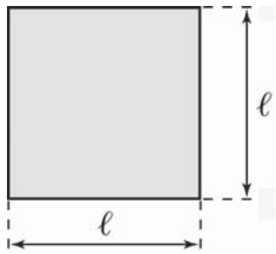
$S = b \times a$

b = medida da base a = medida da altura



"A medida da área S é igual ao produto entre as medidas da base e da altura correspondente."

2. Quadrado



$S = \ell^2$

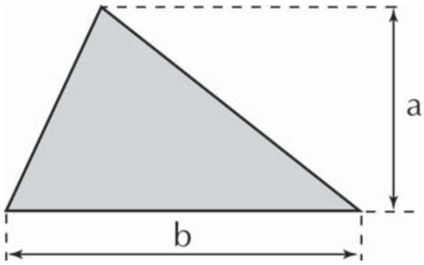
"A medida da área S de um quadrado de lado ℓ é igual ao quadrado da medida desse lado."

3. Triângulo

$$S = \frac{b \times a}{2}$$

b = medida da base

a = medida da altura



"A medida da área S de um triângulo é igual ao semiproduto (metade do produto) entre as medidas da base pela altura correspondente."

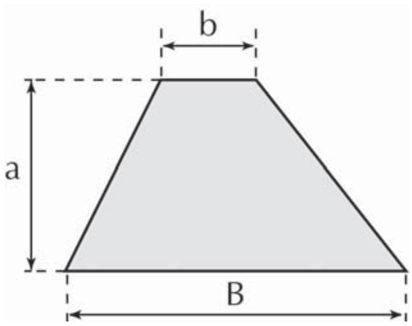
4. Trapézio

$$S = \frac{(b + B) \cdot a}{2}$$

b = medida da base menor

B = medida da base maior

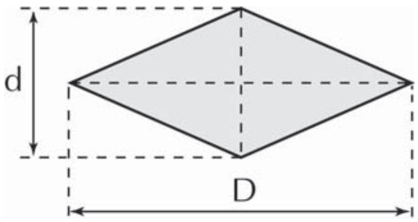
a = medida da altura



"A medida da área S de um trapézio é igual ao semiproduto (metade do produto) entre as medidas da altura e da soma da base."

5. Losango

$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$



D = medida da diagonal maior

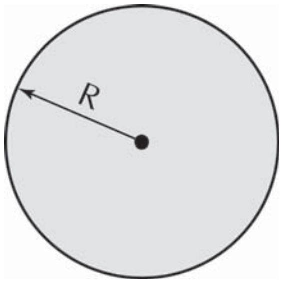
d = medida da diagonal menor

"A medida da área S de um losango é igual ao semiproduto (metade do produto) entre as medidas das diagonais."

6. Área do círculo

$S = \pi R^2$

R = medida do raio



"A medida da área S de um círculo é igual ao produto de π (π ≃ 3,1416; lê-se pi) pelo quadrado da medida de raio."

7. Área plana de figuras compostas

"A medida da área de figuras compostas planas se faz decompondo a figura em figuras planas conhecidas e determinando a soma das medidas das áreas de cada uma das figuras componentes."

Observação

"A medida do comprimento (C) da circunferência de raio R é igual ao duplo produto entre as medidas de π e do raio da circunferência."

$C = 2\pi R$ onde: R = raio

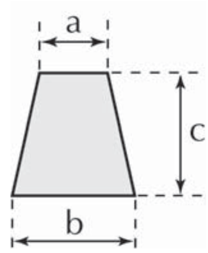
Exercícios

5. Determine a medida da área de um paralelogramo cuja base tem por medida 7 cm e por altura 6 cm.
6. Determine a medida da área de um retângulo cuja base tem por medida 108 mm e por altura 100 mm.
7. Determine a medida da área de um triângulo cuja altura tem por medida 7 km e cuja base tem por medida 6 km.
8. Determine a medida da área de um losango cuja medida da diagonal maior é o dobro da medida da diagonal me-

nor, sabendo-se que a medida da diagonal menor é de 6 m.

9. Determine a medida da área de um círculo cujo raio tem por medida 2 m.

10. Determine a medida da área do trapézio da figura, sendo a = 2 m, b = 4 m, e c = 5 m.



UNIDADES DE VOLUME

Múltiplos
- quilômetro cúbico → km^3 → 1.000.000.000 m^3
- hectômetro cúbico → hm^3 → 1.000.000 m^3
- decâmetro cúbico → dam^3 → 1.000 m^3

Fundamental → metro cúbico → m^3 → 1 m^3

Submúltiplos
- decímetro cúbico → dm^3 → 0,001 m^3
- centímetro cúbico → cm^3 → 0,000001 m^3
- milímetro cúbico → mm^3 → 0,000000001 m^3

Esquematicamente

$$km^3 \xrightarrow{\div 1.000} hm^3 \xrightarrow{\div 1.000} dam^3 \xrightarrow{\div 1.000} m^3 \xrightarrow{\times 1.000} dm^3 \xrightarrow{\times 1.000} cm^3 \xrightarrow{\times 1.000} mm^3$$

Mudança de unidade

Qualquer unidade neste sistema é mil vezes maior do que a unidade imediatamente inferior e mil vezes menor do que a unidade imediatamente superior.



Para mudar de uma unidade para outra, deslocamos a vírgula três casas para a esquerda ou para a direita, conforme se queira uma unidade superior ou inferior.

Exemplificando, temos:

a) Exprimir 2,74 m^3 em hm^3.

Logo: 2,74 m^3 = 0,00274 dam^3 = 0,00000274 hm^3

b) Exprimir 4,783 km^3 em dam^3.

Logo: 4,783 km^3 = 4.783 hm^3 = 4.783.000 dam^3

Exercício

11. Escreva na forma decimal as seguintes medidas, exprimindo-as em m^3:

a) 21 m^3 + 128 dm^3

b) 72 dm^3 + 38 cm^3

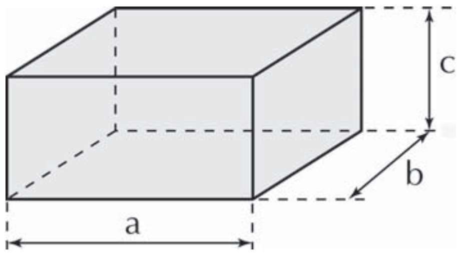
c) 713 m^3 − 3.235 cm^3

d) 34 dam^3 − 432 dm^3

Volumes dos principais sólidos geométricos

1. Paralelepípedo retângulo

$V = a \cdot b \cdot c$



"A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é obtida multiplicando-se as medidas das três arestas."

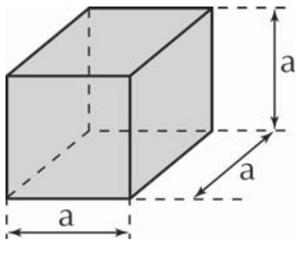
a = medida do comprimento

b = medida da largura

c = medida da altura

2. Cubo

$V = a^3$

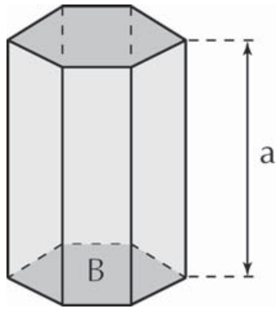


"A medida do volume de um cubo é obtida elevando-se ao cubo a medida da aresta."

3. Prisma regular

$V = B \cdot a$

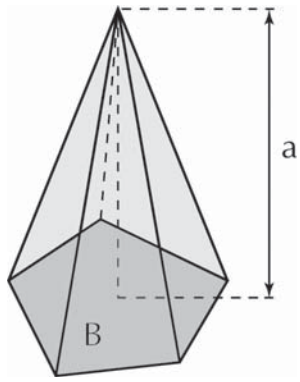
"A medida do volume de um prisma regular é obtida multiplicando-se a medida da área da base (B) pela altura (a) correspondente."



4. Pirâmide

$$V = \frac{B \cdot a}{3}$$

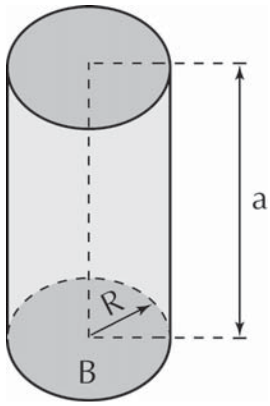
"A medida do volume de uma pirâmide é obtida multiplicando-se a medida da área da base (B) pela altura (a) e dividindo-se o produto obtido por três."



5. Cilindro

$V = \pi R^2 \cdot a$

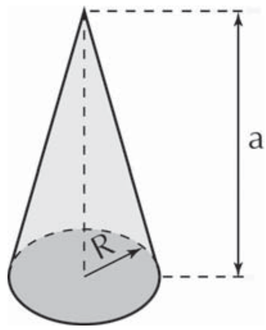
"A medida do volume de um cilindro é obtida multiplicando-se a medida da área da base (πR^2) pela altura (a) dele."



6. Cone

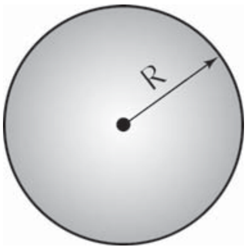
$$V = \frac{\pi R^2 \cdot a}{3}$$

"A medida do volume de um cone é obtida multiplicando-se a medida da área da base (πR^2) pela altura (a) e dividindo-se o produto obtido por três."



7. Esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$



"A medida do volume de uma esfera é igual a quatro terços do produto de π pelo cubo da medida do raio."



Exercícios

12. Calcule a medida do volume de um paralelepípedo retângulo cujas medidas das arestas valem respectivamente: 4 m, 8 m, 6 m. Exprimir o resultado em dam^3.

13. Exprima em dm^3 a medida do volume de um cubo cuja aresta é 5 m.

14. Exprima em m^3 a medida do volume de um prisma cuja medida da área da base é 65 m^2 e cuja medida da altura é 20 m.

15. Determine a medida do volume de uma pirâmide cuja medida da área da base é 734 m^2 e cuja altura é 6 m. Exprimir a resposta em dam^3.

16. Determine a medida do volume de um cilindro cujo diâmetro é 20 m e cuja altura vale 3 m. Exprimir em m^3.

17. Determine a medida do volume de um cone cujo raio da base é 100 cm e cuja altura é de 30 cm. Exprimir em dm^3.

18. Determine a medida do volume de uma esfera que tem por medida do raio 1 dm. Exprimir em dm^3.

19. Qual deverá ser a medida do raio de uma esfera para que possua a medida de seu volume igual à de um cilindro cuja medida do raio da base do mesmo seja igual à medida do raio de esfera (R). Dê a resposta em função da altura (a) do cilindro.

UNIDADES DE CAPACIDADE

$$\text{Múltiplos}\begin{cases}\text{quilolitro} \rightarrow k\ell \rightarrow 1\,000 \text{ litros}\\ \text{hectolitro} \rightarrow h\ell \rightarrow 100 \text{ litros}\\ \text{decalitro} \rightarrow da\ell \rightarrow 10 \text{ litros}\end{cases}$$

Fundamental → litro → ℓ → 1 litro

$$\text{Submúltiplos}\begin{cases}\text{decilitro} \rightarrow d\ell \rightarrow 0{,}1 \text{ litro}\\ \text{centilitro} \rightarrow c\ell \rightarrow 0{,}01 \text{ litro}\\ \text{mililitro} \rightarrow m\ell \rightarrow 0{,}001 \text{ litro}\end{cases}$$

Esquematicamente

$$k\ell \xleftarrow{\div 10} h\ell \xleftarrow{\div 10} da\ell \xleftarrow{\div 10} \ell \xrightarrow{\times 10} d\ell \xrightarrow{\times 10} c\ell \xrightarrow{\times 10} m\ell$$

Quanto se toma de sorvete no mundo?

A quantidade média que um habitante em cada um dos países a seguir consome de sorvete em um ano é:

Estados Unidos	22 litros
Austrália	17 litros
Suécia	14 litros
Alemanha	11 litros
Itália	9 litros
Inglaterra	5 litros
Espanha	4 litros
Argentina	3 litros
Brasil	1 litro



Fonte: *Guia dos curiosos.*

Mudança de unidade



Cada unidade neste sistema é dez vezes maior do que a unidade imediatamente inferior e dez vezes menor do que a unidade imediatamente superior.

Para mudar de uma unidade para outra, deslocaremos a vírgula uma casa para a esquerda ou para direita, conforme se queira uma unidade superior ou inferior.

Exemplificando, temos:

a) Exprimir 387 ℓ → kℓ.
Logo: 387 ℓ = 38,7 daℓ = 3,87 hℓ = 0,387 kℓ

b) Exprimir 387 ℓ → cℓ.
Logo: 387 ℓ = 3.870 dℓ = 38.700 cℓ

As águas ocupam $\frac{2}{3}$ da superfície da Terra. Isso corresponde a $1{,}36 \times 10^{18}$ ℓ. Sabendo que a população total de nosso planeta é de aproximadamente 6 bilhões de pessoas, temos

$$\frac{1{,}36 \times 10^{18}\ \ell}{6 \times 10^{9}\ \text{hab}} = 0{,}22 \times 10^{9}\ \ell/\text{hab}.$$



Ou seja, a cada pessoa corresponde 220.000.000 ℓ, ou 220 milhões de litros de água dos oceanos.

Exercícios

Dica para os Exercícios 20 e 21:
1 kℓ = 1 m^3

20. Qual será a medida da capacidade de um recipiente de óleo, de forma de paralelepípedo retângulo de dimensões: comprimento = 6 m; largura = 2 m; altura = 5 m. Exprimir em kℓ.

21. Qual será a medida da capacidade de um recipiente de água de forma esférica cuja medida do raio é 1 m. Exprimir em mℓ.

UNIDADES DE MASSA

Múltiplos
- quilograma → kg → 1 000 g
- hectograma → hg → 100 g
- decagrama → dag → 10 g

Fundamental → o grama → g → 1 g

Submúltiplos
- decigrama → dg → 0,1 g
- centigrama → cg → 0,01 g
- miligrama → mg → 0,001 g

Esquematicamente

$$\text{kg} \xleftarrow{\div 10} \text{hg} \xleftarrow{\div 10} \text{dag} \xleftarrow{\div 10} \text{g} \xrightarrow{\times 10} \text{dg} \xrightarrow{\times 10} \text{cg} \xrightarrow{\times 10} \text{mg}$$

Mudanças de unidades

Cada unidade neste sistema é dez vezes maior do que a unidade imediatamente inferior e dez vezes menor do que a unidade imediatamente superior.

Para mudar de uma unidade para outra, deslocaremos a vírgula uma casa para a esquerda ou para a direita, conforme se queira uma unidade superior ou inferior.

Exemplificando, temos:

a) Exprimir 831 dag em kg

Logo:

831 dag = 83,1 hg = 8,31 kg

b) Exprimir 831 dag em dg

Logo:

831 dag = 8.310 g = 83.100 dg



Como atua a força da gravidade em outros planetas

A força da gravidade atua com intensidades diferentes nos diversos planetas. Para descobrir quanto pesaríamos em cada um deles, basta multiplicar sua massa pelos números dados na tabela a seguir:

Planeta	*Multiplicador*
Mercúrio	0,38
Vênus	0,88
Marte	0,38
Júpiter	2,67
Saturno	1,07
Lua (satélite da Terra)	0,6



Observações

1. Relação entre unidades de volume, capacidade e massa

   $1\ dm^3 = 1$ litro $= 1$ kg.

   Esta relação é válida desde que se tenha água destilada a 4 °C.

2. Outras unidades usadas para massas são:

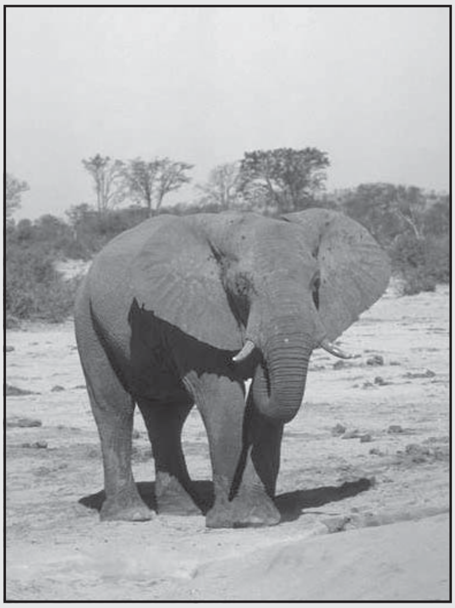
   tonelada (t) → 1 t = 1.000 kg

   quintal (q) → 1 q = 100 kg

O peso dos animais

Na tabela a seguir estão indicados os pesos médios de alguns animais:

Beija-flor	10 gramas
Rato	450 gramas
Frango	3 quilos
Gato	6 quilos
Chimpanzé	70 quilos
Avestruz	100 quilos
Cavalo	450 quilos
Vaca	800 quilos
Hipopótamo	3 toneladas
Elefante africano	6,5 toneladas



Exercícios

22. Exprima em kg:

a) 237,8 g

b) 872,374 dag

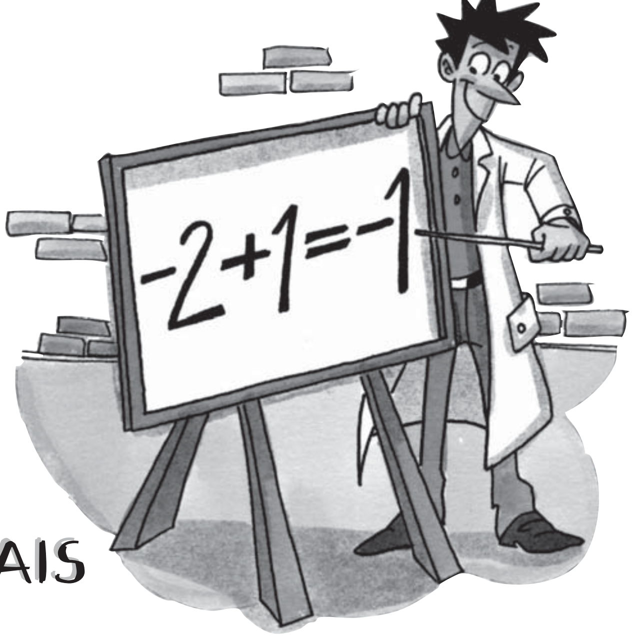
c) 136,27 hg

d) 1.374,28 dg

Respostas

1. a) 3.001,2 m b) 702,73 m
   c) 280,1 m d) 2,008 m
2. a) 742,83823 hm
   b) 47,17626 hm
   c) 3,713297 hm
   d) 0,827413 hm
3. a) 48.003.600 m^2
   b) 2.700,16 m^2
   c) 0,2607 m^2
   d) 200,28 m^2
4. a) 35,9235 dam^2
   b) $\simeq$ 0,7589 dam^2
   c) 13.835,72 dam^2
   d) 34.500 dam^2
5. 42 cm^2
6. 10.800 mm^2
7. 21 km^2
8. 36 m^2
9. $\simeq$ 12,56636 m^2
10. 15 m^2
11. a) 21,128 m^3
    b) 0,072038 m^3
    c) $\simeq$ 712,9968 m^3
    d) 33.999,568 m^3
12. 0,192 dam^3
13. 125.000 dm^3
14. 1.300 m^3
15. 1,468 dam^3
16. 942,477 m^3
17. $\simeq$ 314,160 dm^3
18. $\simeq$ 4,18878 dm^3
19. $R = \frac{3a}{4}$
20. 60 $k\ell$
21. 4.188.790 $m\ell$
22. a) 0,2378 kg
    b) 8,7237 kg
    c) 13,627 kg
    d) 1,3743 kg





Capítulo 8

NÚMEROS RACIONAIS RELATIVOS

Você já parou para pensar por que enquanto em um país é noite no outro ainda é dia, ou mais especificamente porque enquanto no Brasil é meio-dia no Japão é meia-noite?

A causa disso é o movimento de rotação diário da Terra. Uma volta completa da Terra em torno de si mesma leva 24 horas ou um dia.

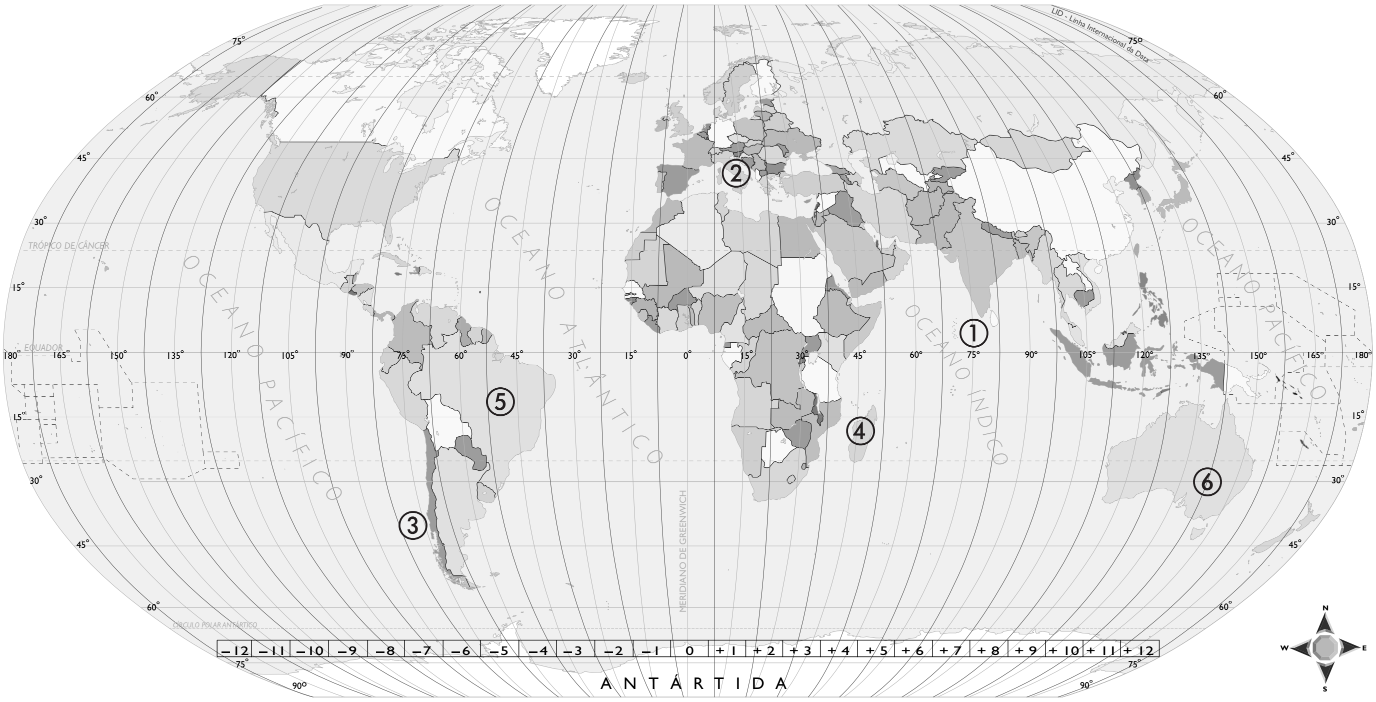
Para podermos dizer qual é o horário em cada lugar, foi escolhido um ponto de referência, o meridiano de Greenwich, que é a linha vertical que corta o mapa, passando pela Inglaterra, mais especificamente pelo bairro da cidade de Londres chamado Greenwich.

Vejamos o mapa de fusos horários.

No mapa a seguir marcamos alguns pontos. O número 1 representa Greenwich. Abaixo podemos verificar uma linha de números que vão de -12 a $+12$. Esses valores são usados para calcular o horário de quaisquer cidades (ou países), um em relação aos outros.

Por exemplo, se são 10 horas em Greenwich (Inglaterra), serão

① 10 + 5 = 15 horas em Sri Lanka
② 10 + 1 = 11 horas na Itália
③ 10 − 5 = 5 horas no Chile
④ 10 + 3 = 13 horas em Madagáscar
⑤ 10 − 3 = 7 horas São Paulo (Brasil)
⑥ 10 + 10 = 20 horas em Sydney (Austrália)



Banco de imagens Rideel

Com isso vimos números novos, ou seja, números que representam quantidades negativas.

Vamos a seguir conhecê-los melhor.

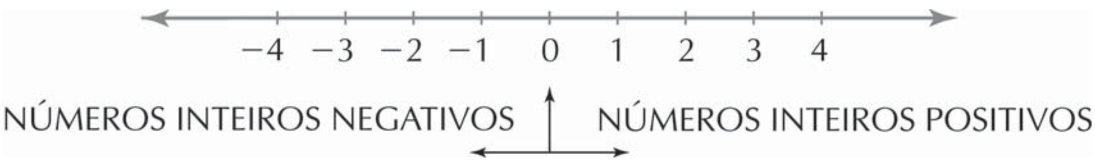
Ao estudarmos as operações no conjunto dos números naturais, observamos que nem todas as operações eram possíveis. Por exemplo, qual o resultado da subtração $10 - 15 = ?$. Agora, num estudo mais avançado, veremos o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), que são números naturais ($\mathbb{N}$) precedidos dos sinais (+) ou (−). Quando forem precedidos do sinal de +, serão chamados de números inteiros positivos ($\mathbb{Z}_+$); e quando precedidos do sinal de −, serão chamados de números inteiros negativos ($\mathbb{Z}_-$), e ainda podemos tomar os inteiros não-nulos ($\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$).

Exemplificando, temos:

$+5$	lê-se: cinco positivo ou mais cinco
-7	lê-se: sete negativo ou menos sete
0	lê-se: zero (não possui sinal)

Reta numerada – representação geométrica

Sobre uma reta qualquer, marcamos um ponto O (origem) e fixamos um sentido de percurso sobre ela, sendo este o sentido crescente, ou seja, todo número colocado imediatamente à direita de outro será maior; os números à direita de zero são os positivos, e os números à esquerda de zero são os negativos. Tomamos uma unidade de medida (u) e dividimos a reta, a partir da origem, tanto para a direita como para a esquerda em tantas partes quantas desejarmos, ou seja:



Números inteiros simétricos ou opostos

Dois números inteiros cujos numerais são iguais, mas com sinais contrários, são denominados números simétricos ou opostos.

Exemplificando, temos:

– O simétrico de $+3$ é -3.

– O simétrico de -5 é $-(-5) = +5$.

Consideremos agora a figura a seguir:



O nível do mar representa o nível zero.

Acima do nível do mar consideramos os valores positivos e abaixo do nível do mar consideramos os valores de profundidade negativos.

Interprete as informações a seguir em relação ao nível do mar:

Exemplos

a) O pico da Neblina, um dos pontos mais altos do Brasil, se encontra a +3.014 m em relação ao nível do mar. Ele fica a 3.014 m acima do nível do mar.

b) A plataforma continental, que é a região que contorna os continentes, tem em média −200 m de profundidade em relação ao nível do mar.

c) O pico da Bandeira, é também um pico do Brasil, que chega a +2.890 m de altitude em relação ao nível do mar.

d) A fossa de Java, localizada no oceano Índico, chega a uma profundidade de −7.125 m em relação ao nível do mar.

e) A atmosfera, que caracteriza a camada de gases que envolve a Terra, foi dividida em cinco partes pelos estudiosos por apresentarem características específicas.

São elas:

Troposfera: que vai desde o nível do mar até +11.000 m.

Estratosfera: de +11.000 m até +40.000 m.

Mesosfera: de +48.000 m até +80.000 m.

Termosfera: de +80.000 m até +650.000 m.

Ionosfera: acima de +650.000 m.

Operações no conjunto dos números inteiros relativos: ($\mathbb{Z}$)

1. *Adição*

Vamos calcular:

$$\begin{cases}(+20) + (+5) = 25 \\ (-20) + (-5) = -25\end{cases}$$

Para adicionarmos dois números inteiros de mesmo sinal, conservamos o sinal comum dos números e adicionamos os valores absolutos.

Vamos calcular:

$$\begin{cases}(+20)+(-5)=15\\(-20)+(+5)=-15\end{cases}$$

Para adicionarmos dois números inteiros de sinais diferentes, conservamos o sinal do número de maior valor absoluto e subtraímos os respectivos valores absolutos.

2. *Subtração*

Recaímos na Adição devido ao fato de ser operação inversa da subtração, bastando trocar o sinal da operação e substituir o subtraendo pelo simétrico, isto é:

$$\begin{cases}(+20)-(+5)=(+20)+(-5)=15\\(-20)-(-5)=(-20)+(+5)=-15\\(+20)-(-5)=(+20)+(+5)=25\\(-20)-(+5)=(-20)+(-5)=-25\end{cases}$$

3. *Multiplicação*

Vamos calcular:

$$\left.\begin{cases}(+20)\times(+5)=+100\\(-20)\times(-5)=+100\end{cases}\right\}=100$$

Para efetuarmos a multiplicação de dois números inteiros de *mesmo sinal*, multiplicamos os valores absolutos e atribuímos ao produto obtido sempre o sinal *positivo* (+).

$$\left.\begin{cases}(+20)\times(-5)=-100\\(-20)\times(+5)=-100\end{cases}\right\}=-100$$

Para efetuarmos a multiplicaçao de dois números inteiros de *sinais diferentes*, multiplicamos os valores absolutos e atribuímos ao produto obtido sempre o sinal *negativo* (−).

4. *Divisão*

Vamos calcular:



$$\begin{cases} (+20) : (+5) = 4 \\ (-20) : (-5) = 4 \\ (+20) : (-5) = -4 \\ (-20) : (+5) = -4 \end{cases}$$

Aqui valem as mesmas observações feitas na multiplicação, mas agora deveremos dividir os valores absolutos.

5. *Potenciação*

Primeiro caso: expoente par positivo

Tanto faz a base ser positiva ou negativa: se o expoente for par positivo, obteremos como resultado da potência o sinal positivo (+).

Assim, temos:

$$(+8)^2 = 64$$
$$(-8)^2 = 64$$



Segundo caso: expoente ímpar positivo

Neste caso, a potência terá sinal igual ao da base.

Assim, temos:

$$(+4)^3 = 64$$
$$(-4)^3 = -64$$

Terceiro caso: expoente negativo

Neste caso, inverte-se a base, e então seguem-se as regras anteriores:

Exemplificando, temos:

$$(-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{(-7)^{+2}} = \frac{1}{49}$$



6. *Radiciação*

Esta operação vai depender do índice da raiz:

• somente poderemos extrair raiz de índice par de número estritamente positivo.

• no caso do índice ser ímpar, a raiz terá sinal (+) se o radicando for positivo e (−), se o radicando for negativo.

Exemplificando, temos:

$\sqrt{+16} = 4$ $\quad \sqrt{-16}$ impossível

$\sqrt[3]{+27} = 3$ $\quad \sqrt[3]{-27} = -3$

Exercícios

1. Efetue as seguintes adições:
   a) (+32) + (+4)
   b) (−32) + (−4)
   c) (+32) + (−4)
   d) (−32) + (+4)

2. Efetue as seguintes subtrações:
   a) (+32) − (+4)
   b) (−32) − (−4)
   c) (+32) − (−4)
   d) (−32) − (+4)

3. Efetue as seguintes multiplicações:
   a) (+32) × (+4)
   b) (−32) × (−4)
   c) (+32) × (−4)
   d) (−32) × (+4)

4. Efetue as seguintes divisões:
   a) (+32) : (+4)
   b) (−32) : (−4)
   c) (+32) : (−4)
   d) (−32) : (+4)

5. Efetue as seguintes potenciações:

a) $(+5)^4$ c) $(+5)^3$

b) $(-5)^4$ d) $(-5)^3$

6. Efetue as seguintes radiciações:

a) $\sqrt{+121}$ c) $\sqrt[3]{+27}$

b) $\sqrt{-121}$ d) $\sqrt[5]{-32}$

7. Resolva as seguintes expressões:

a) $\{[-3 + (-2 - 7) - 4] - 3\} + 5$

b) $(-7 + 3) \times 2 + (-3 - 2) : (-5) + (-4)$

c) $(-7 + 3)^2 : (-2)^3 - (-2 - 7)^2 : (+27)$

d) $8 - [-4 + (-3 + 5) - (-2 - 8)]$

NÚMEROS RACIONAIS RELATIVOS

Já vimos anteriormente os números racionais. A novidade aqui é de que o conjunto dos números racionais também é composto por números negativos.

As frações agora também podem apresentar a forma fracionária:

$$(-5) : 8 = -\frac{5}{8}$$

ou a forma decimal:

$$-\frac{5}{8} = -0{,}625$$

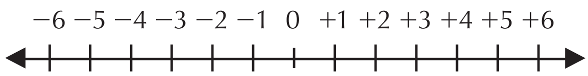
Exercícios

8. Represente na forma decimal as seguintes frações:

a) $-\frac{10}{25}$ c) $-\frac{32}{4}$

b) $-\frac{5}{2}$ d) $-\frac{42}{8}$

9. Sejam os números $-0{,}4$; $-2{,}5$; $-5{,}2$; $0{,}4$; $5{,}2$; $2{,}5$.
Como ficariam sobre a reta numérica.



10. Preencha com os sinais de > e < baseando-se na reta numérica do exercício 9.

a) $-0{,}4$ 1

b) $-0{,}4$ .... $-2{,}5$

c) $-5{,}25$ .... $5{,}25$

d) 4 .... $5{,}2$

e) -4 .... $-5{,}2$

Operações no conjunto dos números racionais relativos

Aqui valem as mesmas observações feitas com relação aos sinais dos números inteiros ($\mathbb{Z}$).

1. *Adição:*

$$\begin{cases} \left(+\frac{4}{5}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)=\frac{(+12)+(+10)}{15}=\frac{22}{15} \\ \left(-\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{(-12)+(-10)}{15}=-\frac{22}{15} \\ \left(+\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{(+12)+(-10)}{15}=\frac{2}{15} \\ \left(-\frac{4}{5}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)=\frac{(-12)+(+10)}{15}=-\frac{2}{15} \end{cases}$$

2. *Subtração:*

$$\begin{cases} \left(+\frac{4}{5}\right)-\left(+\frac{2}{3}\right)=\frac{+4}{5}+\frac{-2}{3}=\frac{(+12)+(-10)}{15}=\frac{2}{15} \\ \left(-\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{-4}{5}+\frac{+2}{3}=\frac{(-12)+(+10)}{15}=-\frac{2}{15} \\ \left(+\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{+4}{5}+\frac{+2}{3}=\frac{(+12)+(+10)}{15}=\frac{22}{15} \\ \left(-\frac{4}{5}\right)-\left(+\frac{2}{3}\right)=\frac{-4}{5}+\frac{-2}{3}=\frac{(-12)+(-10)}{15}=-\frac{22}{15} \end{cases}$$

3. *Multiplicação:*

$$\begin{cases} \left(+\frac{4}{5}\right)\times\left(+\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15}; \\ \left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{15} \\ \left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15}; \\ \left(+\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{15} \end{cases}$$

4. *Divisão:*

$$\begin{cases} \left(+\frac{4}{5}\right):\left(+\frac{2}{3}\right) = \left(+\frac{4}{5}\right)\times\left(+\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{5} \\ \left(+\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(+\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{6}{5} \\ \left(-\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{5} \\ \left(-\frac{4}{5}\right):\left(+\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(+\frac{3}{2}\right) = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

5. *Potenciação:*

$$\begin{cases} \left(+\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} & \left(+\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \\ \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} & \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27} \end{cases}$$

6. *Radiciação:*

$$\begin{cases} \sqrt[2]{\dfrac{+9}{49}} = \dfrac{3}{7} \\ \sqrt[2]{-\dfrac{9}{49}} \text{ não é possível} \end{cases}$$

$$\sqrt[5]{\frac{+32}{243}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} = -\frac{2}{3}$$

Exercícios

11. Efetue as seguintes adições:

a) $\left(\frac{+3}{7}\right) + \left(\frac{+2}{5}\right)$

b) $\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)$

c) $\left(\frac{+3}{7}\right) + \left(\frac{-2}{5}\right)$

d) $\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(\frac{+2}{5}\right)$

12. Efetue as seguintes subtrações:

a) $\left(\frac{+3}{7}\right) - \left(\frac{+2}{5}\right)$

b) $\left(-\frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right)$

c) $\left(\frac{+3}{7}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right)$

d) $\left(-\frac{3}{7}\right) - \left(\frac{+2}{5}\right)$

13. Efetue as seguintes multiplicações:

a) $\left(\frac{+3}{7}\right) \times \left(\frac{+2}{5}\right)$

b) $\left(-\frac{3}{7}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

c) $\left(\frac{+3}{7}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

d) $\left(-\frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{+2}{5}\right)$

14. Efetue as seguintes divisões:

a) $\left(\frac{+3}{7}\right) : \left(\frac{+2}{5}\right)$

b) $\left(-\frac{3}{7}\right) : \left(-\frac{2}{5}\right)$

c) $\left(\frac{+3}{7}\right) : \left(-\frac{2}{5}\right)$

d) $\left(-\frac{3}{7}\right) : \left(\frac{+2}{5}\right)$

15. Efetue as seguintes potenciações:

a) $\left(\frac{+3}{7}\right)^2$

c) $\left(\frac{+1}{2}\right)^5$

b) $\left(-\frac{3}{7}\right)^2$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$

16. Efetue as seguintes radiciações:

a) $\sqrt{\frac{+64}{144}}$ b) $\sqrt{-\frac{64}{144}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{+64}{27}}$ d) $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$

17. Resolva as seguintes expressões:

a) $\left\{\left[-\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]-\frac{2}{3}\right\}+\frac{3}{5}$

b) $\left[\left(2+\frac{3}{5}\right)\times\frac{15}{13}-\frac{1}{8}:\left(-\frac{3}{4}\right)\right]\times\frac{12}{19}$

c) $\left\{\left[\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)+\frac{2}{3}\right]-\frac{10}{15}\right\}:\frac{1}{15}$

d) $\left\{\left[\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\times\frac{12}{3}\right]:-\frac{7}{3}\right\}-\frac{2}{7}$

Respostas

1. a) 36 b) −36 c) 28 d) −28

2. a) 28 b) −28 c) 36 d) −36

3. a) 128 b) 128 c) −128 d) 128

4. a) 8 b) 8 c) −8 d) −8

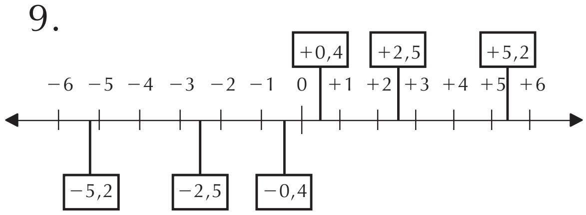
5. a) 625 b) 625 c) 125 d) −125

6. a) 11 b) não é possível c) 3 d) −2

7. a) −14 b) −11 c) −5 d) 0

8. a) −0,4 b) −2,5 c) −8 d) −5,25

9.



10. a) $<$ d) $<$
b) $>$ e) $>$
c) $<$

11. a) $\frac{29}{35}$ c) $\frac{1}{35}$
b) $-\frac{29}{35}$ d) $-\frac{1}{35}$

12. a) $\frac{1}{35}$ c) $\frac{29}{35}$
b) $-\frac{1}{35}$ d) $-\frac{29}{35}$

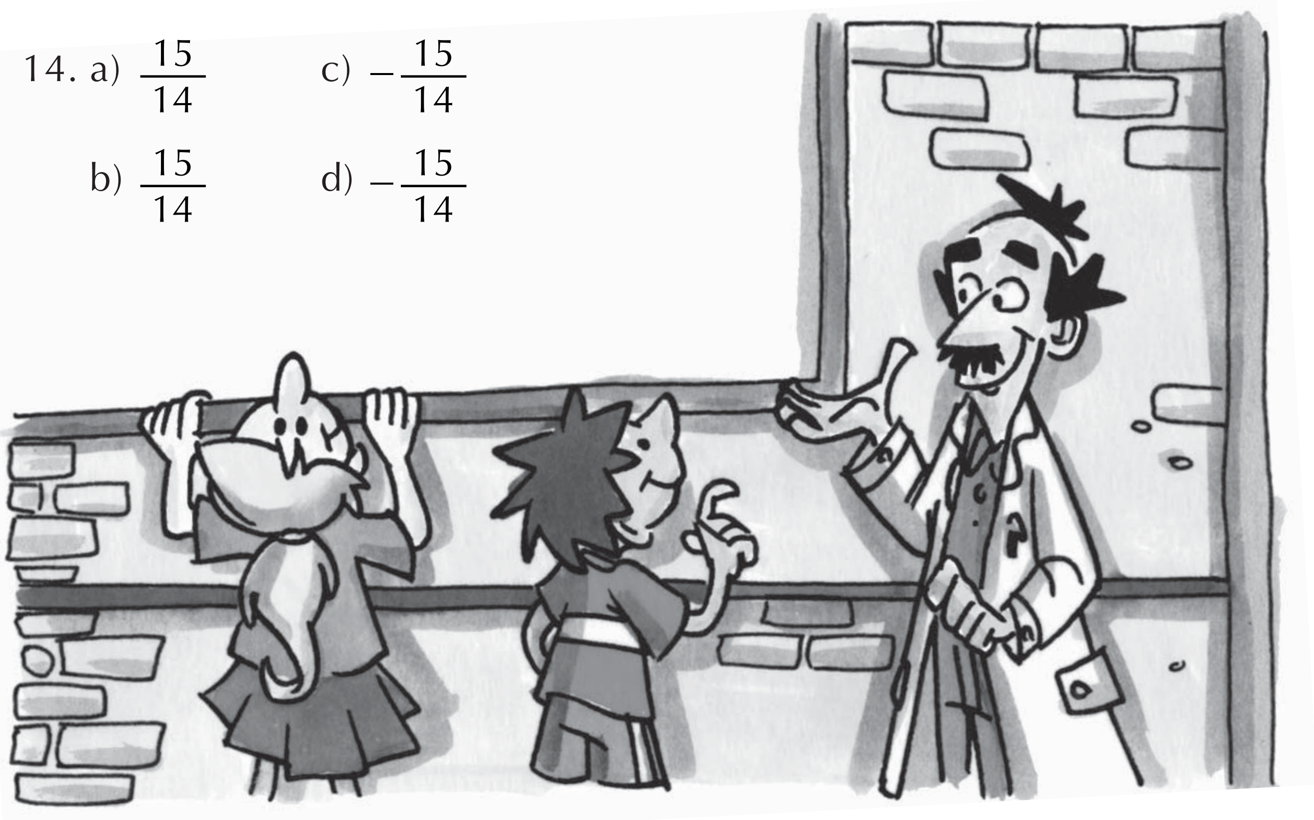
13. a) $\frac{6}{35}$ c) $-\frac{6}{35}$
b) $\frac{6}{35}$ d) $-\frac{6}{35}$

14. a) $\frac{15}{14}$ c) $-\frac{15}{14}$
b) $\frac{15}{14}$ d) $-\frac{15}{14}$

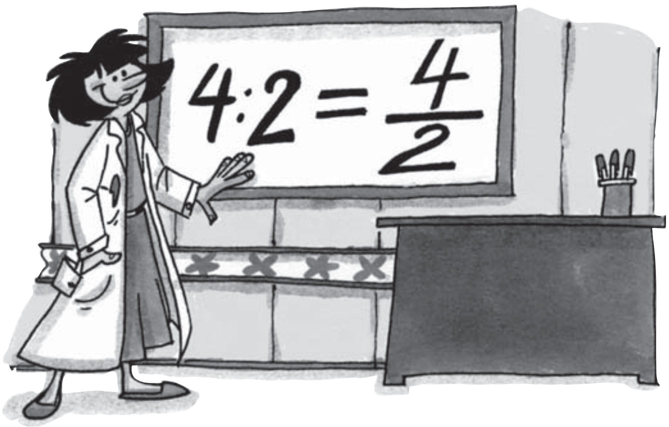
15. a) $\frac{9}{49}$ c) $\frac{1}{32}$
b) $\frac{9}{49}$ d) $-\frac{1}{32}$

16. a) $\frac{8}{12}$ c) $\frac{4}{3}$
b) não é possível d) $-\frac{4}{3}$

17. a) $-\frac{13}{20}$ c) -1
b) 2 d) -1



Capítulo 9



RAZÕES

Sabemos que o Brasil é um país de dimensões continentais, e que nossa população está crescendo rapidamente.

Para descobrirmos o número de habitantes por quilômetro quadrado de território, usamos uma ferramenta matemática chamada *razão*.

O território de nosso país é de 8.547.403 km^2 e nossa população é de cerca de 160 milhões (em 2000).

Aplicando a razão entre essa duas grandezas, obtemos:

$$\frac{160.000.000 \text{ hab.}}{8.547.403 \text{ km}^2} = 18,7 \text{ hab. km}^2$$

Essa razão é chamada de *densidade demográfica*.

Define-se como razão entre dois números quaisquer, dados numa determinada ordem, com o segundo diferente de zero, o quociente entre o primeiro (antecedente) e o segundo número (conseqüente).

Sejam *A* e *B* dois números quaisquer, dados nessa ordem e B ≠ 0. Indicaremos a razão entre os números por:

$$A : B = \frac{A}{B}, \text{ onde: } \begin{cases} A = \text{antecedente} \\ B = \text{conseqüente} \end{cases}$$

Exercício

1. Calcule a razão, a densidade demográfica, entre a população e a área de alguns estados brasileiros.

	Número de habitantes	*Área territorial*	*Densidade demográfica*
Pernambuco	7.399.071	98.937	
Santa Catarina	4.875.244	95.442	
Tocantins	1.048.642	278.420	
Paraíba	3.305.616	56.584	
Minas Gerais	16.672.613	588.383	
São Paulo	34.119.110	248.808	

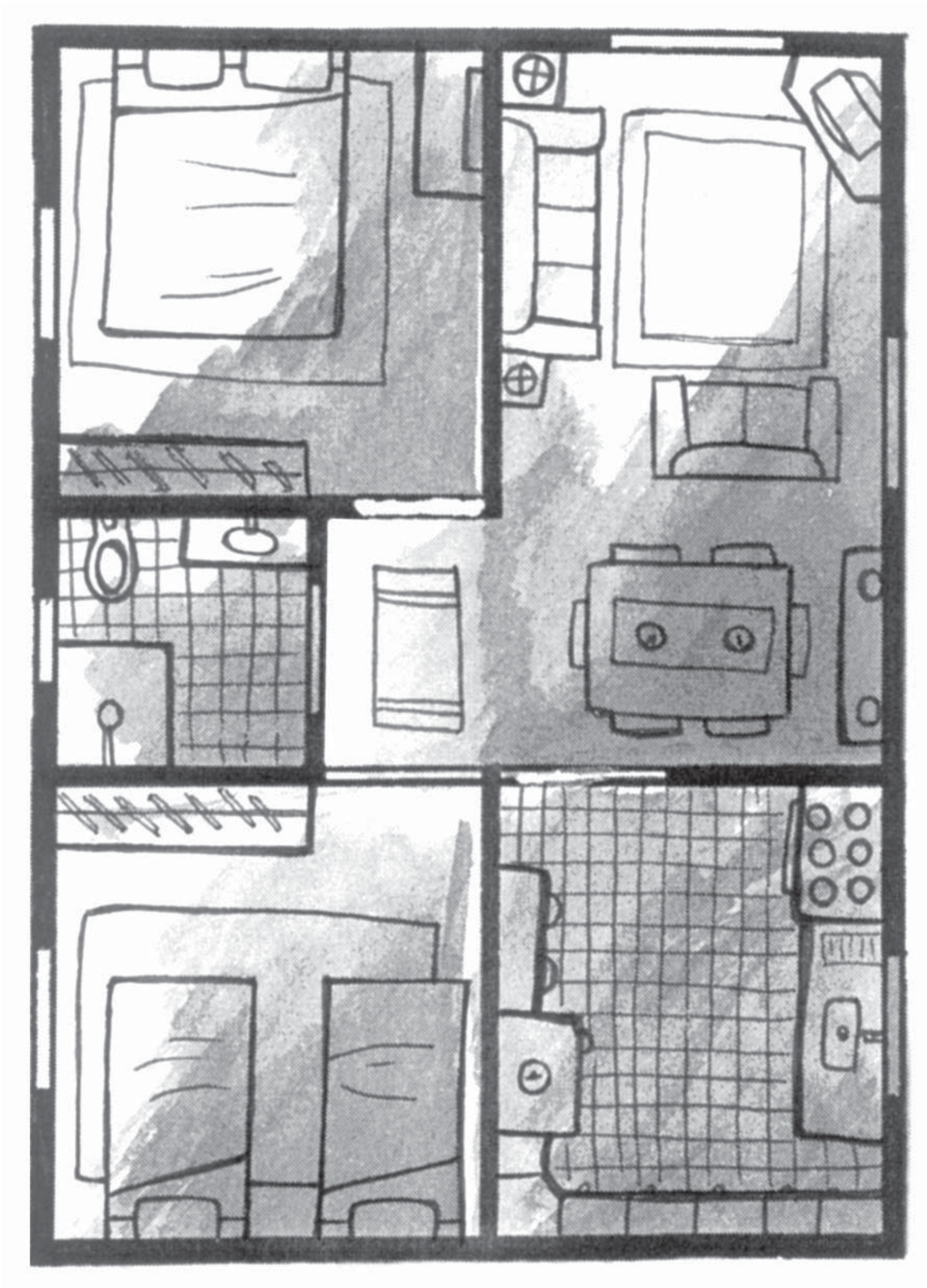
Agora, responda:
Dentre os estados brasileiros da tabela acima, qual o que apresenta maior densidade demográfica? Qual apresenta a menor?

ESCALAS

Escala é a razão entre o comprimento do desenho e o comprimento do real.

Exemplo

Suponhamos uma casa que tenha sido desenhada na proporção 1:100



As dimensões dessa casa seriam:

$$7 \text{ cm} \times 100 = 7 \text{ m}$$

$$10 \text{ cm} \times 100 = 10 \text{ m}$$

Portanto, a área dessa casa seria $7 \text{ m} \times 10 \text{ m} = 70 \text{ m}^2$.

Exercício

2. A planta do apartamento a seguir está em escala 1:1.000.



Responda:

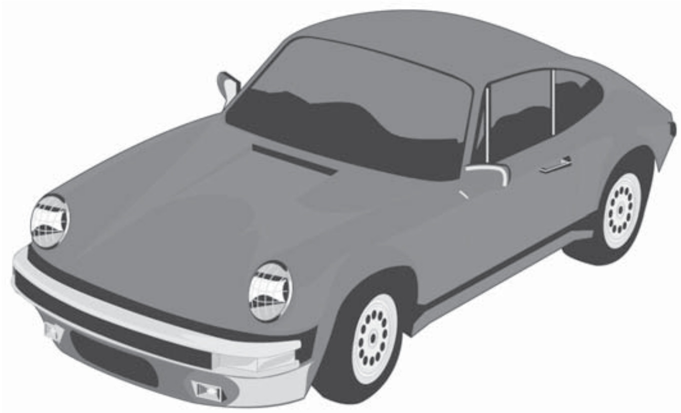
a) Quais as dimensões reais desse apartamento?

b) Qual a área real desse apartamento?

PROPORÇÕES

Observe os dois desenhos de um mesmo carro:





Além do fato de serem aparentemente semelhantes, o que mais podemos dizer sobre eles?

Para descobrir a resposta a essa pergunta, pegue uma régua e meça o primeiro desenho, e em seguida escreva os resultados da seguinte maneira:

$$\frac{\text{altura}}{\text{comprimento}}$$

Façamos o mesmo com o segundo desenho.

Com isso descobrimos duas frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$. Observe essas frações: qual a relação entre elas?

Podemos concluir que elas são equivalentes, ou seja, representam o mesmo valor:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

Chama-se *proporção* a equivalência entre duas razões.

Assim, temos genericamente: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $a : b = c : d$, que se lê: "*a*" está para "*b*", assim como "*c*" está para "*d*", onde "*a*" e "*d*" são chamados de *extremos* e "*b*" e "*c*" são os *meios*.

Ou seja, para o nosso exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ ou } 1 : 2 = 3 : 6$$

Dizemos então que um está para dois assim como três está para seis.

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES

Em toda proporção, o produto entre os extremos é igual ao produto entre os meios.

Genericamente:

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então } a \times d = b \times c.$$

Para o nosso exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \text{ temos } 1 \times 6 = 2 \times 3.$$

Exercícios

3. Calcule o produto dos extremos e o produto dos meios das seguintes proporções:

a) $\frac{2}{8}=\frac{7}{28}$ b) $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$ c) $\frac{500}{75}=\frac{20}{3}$ d) $\frac{100}{15}=\frac{20}{3}$

4. Usando a propriedade fundamental das proporções, confira se as proporções se verificam.

a) $\frac{3}{2}=\frac{10}{15}$ b) $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ c) $\frac{10}{11}=\frac{18}{22}$ d) $\frac{3}{48}=\frac{1}{16}$

Determinacão de um termo qualquer de uma proporção.

Para se determinar um termo desconhecido de uma proporção, basta aplicar a propriedade fundamental das proporções.

Exemplo

Calcular o valor de "*x*" em: $\frac{4}{6}=\frac{16}{x}$

Solução

$$4 \cdot x = 6 \cdot 16 \rightarrow x = \frac{6 \cdot 16}{4} \rightarrow x = 24$$

Exercício

5. Determine o valor de *x* nas proporções.

a) $\frac{x}{4}=\frac{5}{2}$

b) $\frac{6}{x}=\frac{12}{10}$

c) $\frac{1}{4}=\frac{x}{12}$

d) $\frac{45}{16}=\frac{x}{48}$

Exemplo

Em um pacote de biscoitos vem 40 unidades. Se para cada biscoito comido por Márcia corresponde a 3 comidos por Davi, quantos biscoitos comeu cada um?

x: número de biscoitos comidos por Márcia.

y: número de biscoitos comidos por Davi.

Portanto:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções temos:

$$3x = y \quad \text{ou} \quad 3x - y = 0$$

Assim,

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$$4x = 40$$

$$x = \frac{40}{4} = 10$$

Se x = 10, então

$$y = 3x$$
$$y = 3 \cdot 10$$
$$y = 30$$

Portanto, Márcia comeu 10 biscoitos enquanto Davi comeu 40 biscoitos.

Exercícios

6. Determine os valores de x e y nos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{28}{12} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 12 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{14}{10} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 36 \\ \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{5} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 12 \\ \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{5} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \times y = 270 \\ \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{5} \end{cases}$

7. Em uma empresa, 7 em 10 trabalhadores ganham 2 salários mínimos. Se nessa empresa trabalham 10.000 pessoas, quantos empregados dessa empresa ganham dois salários minímos?

8. Uma comissão de parlamentares possui 15 membros. Se para cada homem houver duas mulheres nessa comissão, por quantas mulheres ela é composta?

9. A soma das idades de Vera e de sua filha Clara é 30. Se a razão da menor para a maior é $\frac{1}{5}$, qual a idade de cada uma delas?

Exemplo

Determine o valor de x nas proporções:

a) $\frac{3x}{2x + 4} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{x - 5}{6} = \frac{x + 4}{8}$

Solução

a) Utilizando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$2 \cdot 3x = 1 \cdot (2x + 4)$$

$$6x = 2x + 4$$

$$6x - 2x = 4$$

$$4x = 4$$

$$\boxed{x = 1}$$

b) Novamente,

$$8 \cdot (x - 5) = 6 \cdot (x + 4)$$

$$8x - 40 = 6x + 24$$

$$8x - 6x = 24 + 40$$

$$2x = 64 \rightarrow x = \frac{64}{2}$$

$$\boxed{x = 32}$$

Exercício

10. Determine o valor de x nas proporções:

a) $\frac{4x}{2x+3} = \frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{x-1} = \frac{2}{x+1}$

Média aritmética

A tabela a seguir mostra o número de gols e o número de partidas de algumas copas do mundo de futebol.

Ano	*Gols*	*Partidas*	*Gols/Partida*
1970	95	32	
1974	97	38	
1978	102	38	
1982	146	52	
1986	132	52	
1990	115	52	
1994	141	52	

Exercício

11. Calcule as razões de quantos gols por partida foram marcados.

Agora, para sabermos quantos gols em média foram marcados nessas 7 copas de futebol, somamos os gols marcados em cada uma delas e dividimos pelo número de copas, dessa maneira:

$$\frac{95+97+102+146+132+115+141}{7} = \frac{828}{7} \simeq 118{,}28 \text{ gols/copa}$$

ou, aproximadamente, 118,28 gols por copa.

Exercícios

12. Na tabela a seguir estão relacionados os pesos das jogadoras de uma equipe de basquete feminino.

    Qual o peso médio das atletas desse time?

Jogadores	*Peso*
Vilma	64 kg
Carla	72 kg
Elaine	58 kg
Gladis	67 kg
Bete	70 kg

Média ponderada

Foram medidos os pesos dos alunos de uma classe escolar. Os valores obtidos foram relacionados na tabela a seguir:

Alunos	*Peso (kg)*
5	46 kg
6	49 kg
8	52 kg
3	54 kg
5	55 kg
3	58 kg
Total 30 alunos	

Para determinarmos agora a média de peso dos alunos dessa classe, deveremos multiplicar os pesos pelo número de alunos e dividir pelo número total de alunos da classe, dessa maneira:

$$\frac{5 \times 46 + 6 \times 49 + 8 \times 52 + 3 \times 54 + 5 \times 55 + 3 \times 58}{30} =$$

$$= \frac{1.551}{30} = 51{,}70 \text{ kg/aluno}$$

Portanto o peso médio dos alunos dessa classe é de 51,70 kg. A esse tipo de média dá-se o nome de *média ponderada*.

Exercício

13. Agora calcule a média ponderada das alturas dos alunos da classe citada anteriormente.

Número de alunos	*Altura (cm)*
3	147
5	149
4	151
6	154
5	159
4	162
3	165
30 alunos	

DIVISÃO PROPORCIONAL

Sucessões de números diretamente proporcionais

Consideremos, por exemplo, duas sucessões de números:

S_I: 2, 4, 8, 16

S_{II}: 8, 16, 32, 64



Formemos a razão entre cada elemento de S_I com o respectivo elemento de S_{II}, obtendo:

$$\frac{S_I}{S_{II}} \rightarrow \frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{8}{32} = \frac{16}{64}$$

e verifiquemos que a razão assim formada é constante e igual a 1 para 4.

Por ser constante, a razão será denominada *coeficiente de proporcionalidade*, e indicaremos por *Kp*.

Logo,

$$\frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{8}{32} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} = Kp$$

Genericamente, poderíamos representar duas sucessões de números por:

S_{I}: a, b, c, d

S_{II}: A, B, C, D

então:

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{d}{D} = \text{.........} = Kp$$

Conclusão:

Duas sucessões de números são diretamente proporcionais se a razão entre os valores numéricos da primeira sucessão pelos respectivos elementos da segunda for constante.

Divisão em partes diretamente proporcionais

É o caso dos problemas da determinação dos valores de uma sucessão desconhecida, sendo dados a outra sucessão e o valor da *constante de proporcionalidade*.

Exemplo

Dividir um pacote com 22 caramelos entre Izamar e Mariza, de tal modo que as partes correspondentes a cada uma sejam diretamente proporcionais respectivamente a 4 e 7.

Solução

Sejam A e B os números de caramelos procurados respectivamente de Izamar e Mariza.

$$\text{Logo: } \begin{cases} A + B = 22 & \text{(I)} \\ \dfrac{A}{4} = \dfrac{B}{7} & \text{(II)} \end{cases}$$

Aplicando-se a propriedade fundamental das proporções em II obtemos:

$$7A = 4B \Rightarrow \boxed{A = \frac{4B}{7}}$$

Substituindo-se esse resultado em I, temos:

$$\frac{4B}{7} + B = 22$$

Aplicando-se o mmc(1, 7) = 7, temos:

$$\frac{4B + 7B}{7} = 22$$

$$11B = 22 \times 7$$

$$B = \frac{\overset{2}{\cancel{22}} \times 7}{\cancel{11}} \Rightarrow B = 14$$



Se $B = 14$ então $A = \frac{4 \cdot \overset{2}{\cancel{14}}}{\cancel{7}} = 4 \cdot 2 = 8$

Logo, o número de caramelos de Izamar é 8, e o número de caramelos de Mariza é 14.

Sucessões de números inversamente proporcionais

Consideremos, por exemplo, duas sucessões de números:

$$S_I \rightarrow 81, 27, 9, 3$$

$$S_{II} \rightarrow 1, 3, 9, 27$$

Formemos a razão entre os elementos de cada uma das sucessões, tais que o antecedente de cada razão seja os elementos de qualquer uma delas, e o conseqüente seja formado pelos inversos dos elementos da outra sucessão, da seguinte maneira:

$$\frac{S_I}{\frac{1}{S_{II}}} \rightarrow \frac{81}{\frac{1}{1}} = \frac{27}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{1}{9}} = \frac{3}{\frac{1}{27}}$$

e verifiquemos que a razão assim formada é constante e igual a 81 para 1, ou seja:

$$\frac{81}{\frac{1}{1}} = \frac{27}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{1}{9}} = \frac{3}{\frac{1}{27}} = \frac{81}{1} = Kp$$

Genericamente, poderíamos representar duas sucessões de números por:

$$S_{\mathrm{I}} \rightarrow \; a, b, c, d$$
$$S_{\mathrm{II}} \rightarrow A, B, C, D$$

então:

$$\frac{a}{\frac{1}{A}} = \frac{b}{\frac{1}{B}} = \frac{c}{\frac{1}{C}} = \frac{d}{\frac{1}{D}} = ... = Kp$$

Conclusão:

Duas sucessões de números são inversamente proporcionais se o produto de um elemento de uma, pelo correspondente elemento da outra, for constante.

Divisão em partes inversamente proporcionais

Para dividir um número qualquer em partes inversamente proporcionais a números dados, devemos transformar o problema em *divisão* em partes *diretamente proporcionais* aos inversos dos respectivos números dados.

Exemplo

Dividir 14 revistinhas entre Eduardo e Fábio, de tal modo que as partes correspondentes a cada um sejam inversamente proporcionais a 3 e 4.

Solução

Sejam *A* e *B* os números de revistinhas procuradas, respectivamente, de Eduardo e Fábio.

Logo:

$$A + B = 14 \quad \text{(I)}$$

$$\frac{A}{\frac{1}{3}} = \frac{B}{\frac{1}{4}} \quad \text{(II)}$$



Aplicando-se a propriedade fundamental das proporções em II, obtemos:

$$\frac{1}{4} \cdot A = \frac{1}{3}B$$

$$A = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} \cdot B$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot B$$

$$\boxed{A = \frac{4}{3}B}$$

Substituindo-se esse resultado em I, temos:

$$\frac{4B}{3} + B = 14$$

Aplicando-se o mmc(1, 3) = 3, temos

$$\frac{4B + 3B}{3} = 14$$

$$7B = 14 \cdot 3$$

$$B = \frac{\overset{2}{\cancel{14}} \cdot 3}{\cancel{7}}$$

$$B = 2 \cdot 3$$

$$B = 6$$

Se $B = 6$, então

$$A = \frac{4}{3} \cdot 6 = \frac{24}{3} = 8$$

Logo, o número de revistinhas de Eduardo é 8, e o número de revistinhas de Fábio é 6.

Divisão em partes diretamente e inversamente proporcionais simultaneamente

Se uma grandeza é diretamente proporcional a alguns números e inversamente proporcional a outros, a grandeza será diretamente proporcional ao produto deles.

Exemplo

Dividir o número 46 em partes diretamente proporcionais a 5 e 4 e inversamente proporcionais a 2 e 3, respectivamente.

Solução

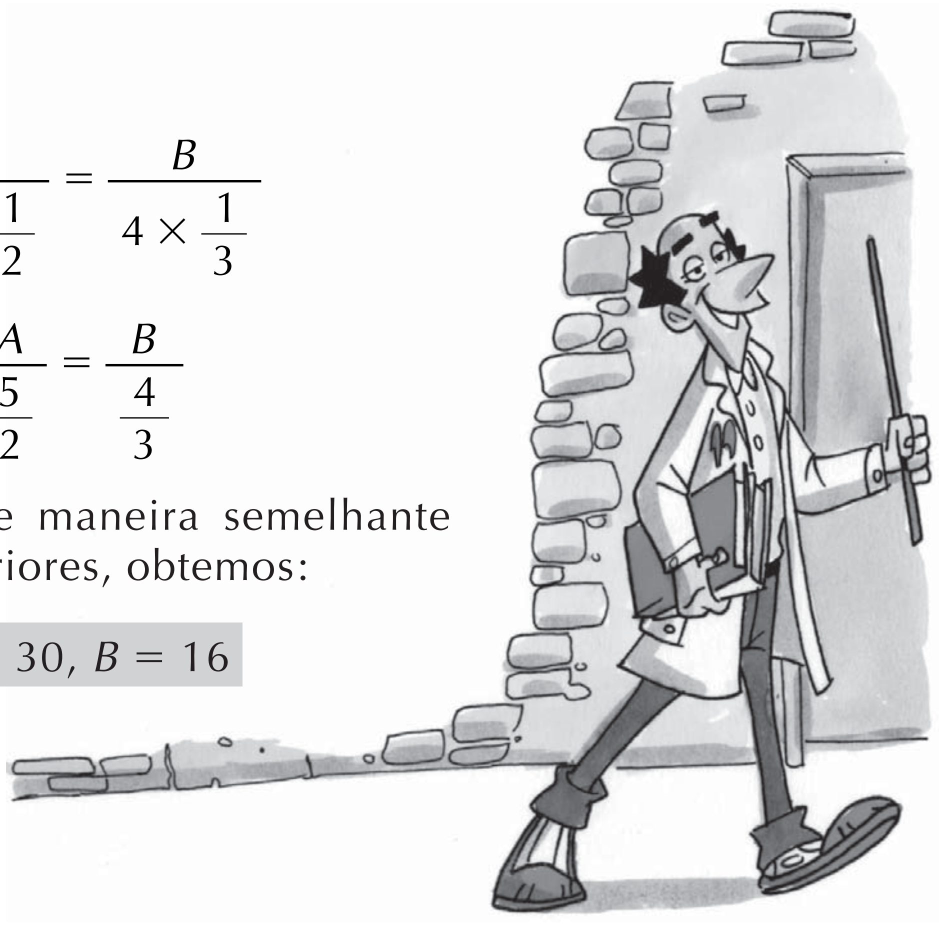
$A + B = 46$

$$\frac{A}{5 \times \frac{1}{2}} = \frac{B}{4 \times \frac{1}{3}}$$

$$\frac{A}{\frac{5}{2}} = \frac{B}{\frac{4}{3}}$$

procedendo de maneira semelhante aos casos anteriores, obtemos:

$A = 30,\ B = 16$



Exercícios

14. Divida o número 50 em partes diretamente proporcionais a 2 e 3 respectivamente.
15. Divida o número 70 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 5 respectivamente.
16. Divida o número 120 em partes diretamente proporcionais a 4, 5 e 6 respectivamente.
17. Divida o número 55 em partes diretamente proporcionais a 5 e 6 respectivamente.
18. Divida o número 33 em partes inversamente proporcionais a 4 e 7 respectivamente.
19. Divida o número 250 em partes inversamente proporcionais a 0,3 e 0,2 respectivamente.
20. Divida o número 72 em partes inversamente proporcionais a 2, 3, 5 e 6 respectivamente.
21. Divida o número 38 em partes inversamente proporcionais a $\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{3}$ respectivamente.
22. Divida o número 92 em partes diretamente proporcionais a 3 e 4 e em partes inversamente proporcionais a 2 e 5, simultaneamente.
23. Divida o número 191 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 4 e em partes inversamente proporcionais a $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{5}$ e $\frac{3}{2}$, simultaneamente.

REGRAS DE TRÊS

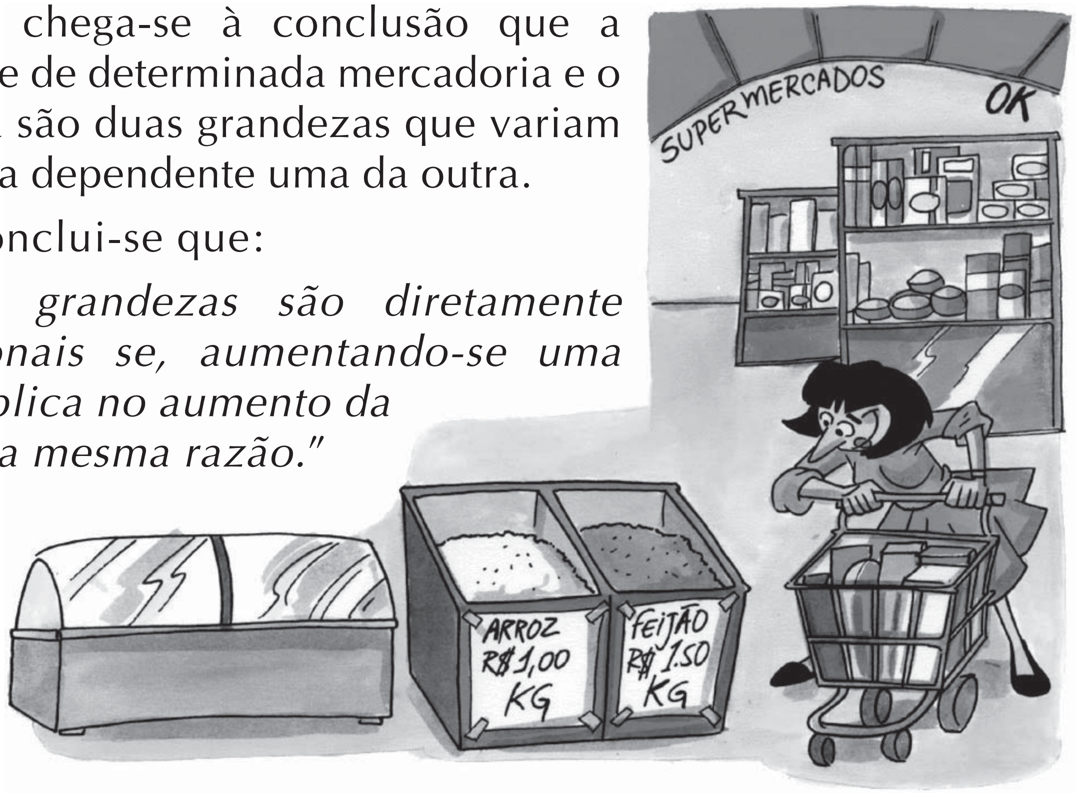
Grandezas diretamente proporcionais

Quando você for a um supermercado, para efetuar compras das mercadorias de que precisa, observará que cada uma delas tem um determinado valor, como o arroz, o feijão etc. ... e ainda mais, observará que este valor dependerá da quantidade que você levar.

Então, chega-se à conclusão que a quantidade de determinada mercadoria e o custo dela são duas grandezas que variam de maneira dependente uma da outra.

Daí conclui-se que:

"Duas grandezas são diretamente proporcionais se, aumentando-se uma delas, implica no aumento da outra, e na mesma razão."



Grandezas inversamente proporcionais



Um exemplo típico dessas grandezas é o seguinte: consideremos um veículo que tenha de ir de uma cidade a outra a uma distância de 160 quilômetros, e de tal modo que percorra essa distância em 2 horas. Vamos supor que, por um motivo qualquer, ao partir de uma cidade em direção à outra ele tenha de chegar num tempo menor do que 2 horas; para tanto, terá de aumentar a velocidade do veículo para 100 quilômetros horários (100 km/h).

Percebe-se que nesse exemplo, para uma mesma distância fixa (160 quilômetros), o tempo de percurso que o veículo levará dependerá da velocidade desenvolvida por ele, ou seja, quanto maior a velocidade, menor será o tempo de percurso.

Daí conclui-se que:

"Duas grandezas são inversamente proporcionais se, aumentando-se uma delas, implica na diminuição da outra, e na mesma razão."

Regra de três simples

Denomina-se regra de três simples o método de cálculo por meio do qual serão resolvidos os problemas que envolvem duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Exemplo 1

Izamar comprou seis caixas de lápis, contendo cada uma doze lápis iguais, pagando R$ 2,40 pela compra. Quanto pagará se comprar oito caixas iguais às primeiras?

Solução 1

$$6 \text{ caixas} \longrightarrow 2{,}40$$
$$8 \text{ caixas} \longrightarrow \square$$

Um modo elementar de determinarmos o valor das 8 caixas é procurarmos o preço unitário de cada caixa. Logo, se por 6 caixas ele paga R$ 2,40, então por uma caixa pagará 2,40 : 6, ou seja, R$ 0,40. Então, oito caixas custarão 8 × 0,40 = R$ 3,20.

Solução 2

Formemos colunas correspondentes às grandezas homogêneas, e na mesma linha as grandezas heterogêneas correspondentes aos dados do problema.

Assim, temos:

$$\begin{array}{l|lcr|l} & 6 \text{ caixas} & \text{———} & \text{R\$ } 2{,}40 & \\ \downarrow & 8 \text{ caixas} & \text{———} & \square & \downarrow \end{array}$$

As flechas introduzidas no esquema acima são de mesmo sentido, de acordo com a noção de *grandezas diretamente proporcionais*.

Então, formemos a proporção correspondente:

$$\frac{6}{8} = \frac{2{,}40}{\square} \rightarrow 6 \cdot \square = 8 \times 2{,}40$$

$$\square = \frac{8 \times 2{,}40}{6}$$

$$\square = 3{,}20$$



Portanto, Izamar pagará pelas oito caixas R$ 3,20.

Exemplo 2

Um automóvel, desenvolvendo uma velocidade constante e igual a 60 km/h, leva quatro horas para percorrer uma distância de 240 km entre duas cidades. Tendo acontecido uma emergência, o motorista terá de efetuar o mesmo trajeto em três horas. Pergunta-se qual a velocidade (considerada constante) para que ele faça o percurso no tempo previsto.

Solução

Observamos que se o motorista diminuir o tempo de percurso, ele terá de aumentar a velocidade desenvolvida pelo veículo. Logo, são *grandezas inversamente proporcionais*; neste caso, as flechas terão sentidos contrários.

Donde:

$$\downarrow \begin{array}{ccc} 60 \text{ km/h} & \text{———} & 4 \text{ horas} \\ \square & \text{———} & 3 \text{ horas} \end{array} \uparrow$$

Para formarmos a proporção, deveremos inverter uma das razões, isto é:

$$\frac{60}{\square} = \frac{1}{\frac{4}{3}} \rightarrow \frac{60}{\square} = \frac{3}{4}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, obtemos:

$$3 \times \square = 60 \times 4$$

$$\square = \frac{60 \times 4}{3}$$

$$\square = 80 \text{ km/h}$$

Regra de três composta

Denomina-se *regra de três composta* o método de cálculo por meio do qual serão resolvidos os problemas que envolvam mais de duas grandezas variáveis.

Exemplo

15 operários trabalhando nove horas diárias constroem 300 m^2 de um muro ao redor de um campo de futebol. Quantos metros quadrados do muro serão construídos se trabalharem 20 operários durante 6 horas diárias?

Solução

$$\begin{array}{ccccc} 15 \text{ operários} & \text{———} & 9 \text{ horas diárias} & \text{———} & 300 \text{ m}^2 \\ 20 \text{ operários} & \text{———} & 6 \text{ horas} & \text{———} & \square \end{array}$$

Para determinarmos quais são as grandezas diretamente proporcionais e quais as inversamente proporcionais, procederemos da seguinte maneira:

– consideremos fixa uma das grandezas, como o número de operários, assim: se 15 operários constroem 300 m^2 do muro, ao aumentarmos o número de operários, eles construirão mais metros quadrados. Logo, são grandezas diretamente proporcionais.

– agora, consideremos fixa a grandeza horas diárias, e assim: se os operários trabalhando 9 horas diárias executam 300 m^2, trabalhando menos horas diárias, farão menos metros quadrados.

Logo:

operários	horas diárias	m^2
↓ 15	↑ 9	↓ 300
20	6	□

Para montarmos a proporção correspondente, deveremos isolar a grandeza desconhecida e inverter as razões correspondentes às grandezas inversamente proporcionais.

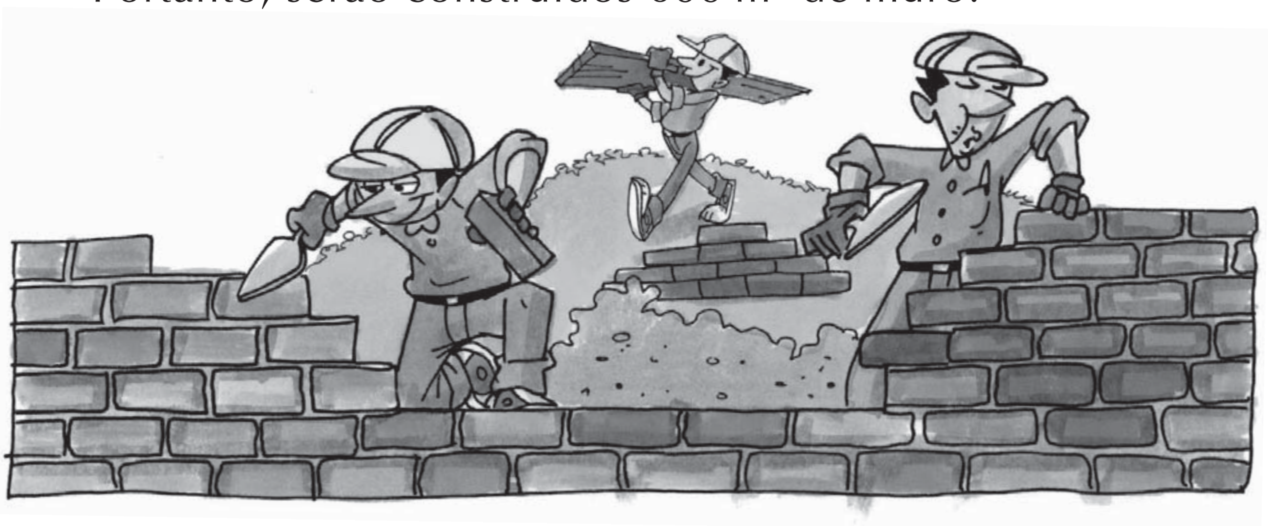
Assim, temos:

$$\frac{15}{20} \times \frac{6}{9} = \frac{300}{\square}$$

$$\square = \frac{300 \times 20 \times 9}{15 \times 6}$$

$$\square = 600 \text{ m}^2$$

Portanto, serão construídos 600 m^2 de muro.



Exercícios

24. Se trinta litros de um combustível custam R$ 16,95, quanto custarão oitenta litros do mesmo combustível?

25. Se quatro costureiras fazem 32 calças em cinco horas diárias de costura, quantas calças serão feitas por nove costureiras iguais às primeiras, trabalhando o mesmo número de horas diárias?

26. Um acampamento militar com oitenta comandados tem suprimento para dez dias. Sabendo-se que chegaram mais vinte soldados, pergunta-se: para quantos dias terão suprimentos, considerando-os inalteráveis?

27. Dezesseis operários trabalhando seis horas por dia constroem uma residência em cento e oitenta dias. Quantos operários serão necessários para construir a mesma residência, trabalhando oito horas por dia durante cento e vinte dias?

28. Para a construção de um açude, vinte e oito homens, trabalhando seis horas diárias, retiraram duzentos e quarenta metros cúbicos de terra. Quantos homens serão necessários para retirar quatrocentos e vinte metros cúbicos de terra, trabalhando três horas diárias?

PORCENTAGEM

Quando efetuamos uma compra, o vendedor, em alguns casos, pode ou não conceder um desconto. Assim, se ele concedesse um desconto de 8% em uma compra de R$ 100,00, teríamos que pagar pela compra somente R$ 92,00.



Esses descontos para serem calculados se baseiam em razões cujo *conseqüente* é cem.

Assim, no caso anterior, teríamos: 8/100 = 8%, valor este que é chamado de *taxa* e geralmente indicado por "*i*"; o valor da compra é chamado de *principal* ou *capital*, sendo indicado por "*C*"; e finalmente o desconto (ou acréscimo) é chamado de *porcentagem* e indicado por "*p*".

Assim temos:

para cada "100" ——— corresponderá "*i*"

para *C* ——— corresponderá "*p*"

Logo:

$$\downarrow \begin{matrix} 100 & \text{———} & i \\ C & \text{———} & p \end{matrix} \downarrow$$

ou:

$$\frac{100}{C} = \frac{i}{p} \rightarrow 100 \cdot p = C \cdot i \rightarrow \boxed{p = \frac{C \cdot i}{100}}$$

Exemplo 1

Determine a quanto corresponde 7% de R$ 21.000,00.

Solução

$$\begin{cases} p = ? \\ C = 21.000{,}00 \\ i = 7\% \end{cases} \rightarrow p = \frac{C \cdot i}{100} = \frac{21.000 \times 7}{100}$$

$$p = \text{R\$ } 1.470{,}00$$

Exemplo 2

Determine a que taxa corresponde R$ 14.000,00 de uma quantia de R$ 98.000,00.

Solução

$$\begin{cases} p = 14.000,00 \\ C = 98.000,00 \\ i = ? \end{cases} \rightarrow i = \frac{100 \cdot p}{C} = \frac{100 \times 14.000}{98.000}$$

$$i = 14,3\%$$



Exemplo 3

Determine o principal, dados a porcentagem igual a R$ 10.000,00 e a taxa de 5%.

Solução

$$\begin{cases} p = 10.000,00 \\ C = ? \\ i = 5\% \end{cases} \rightarrow C = \frac{100 \cdot p}{i} = \frac{100 \times 10.000}{5}$$

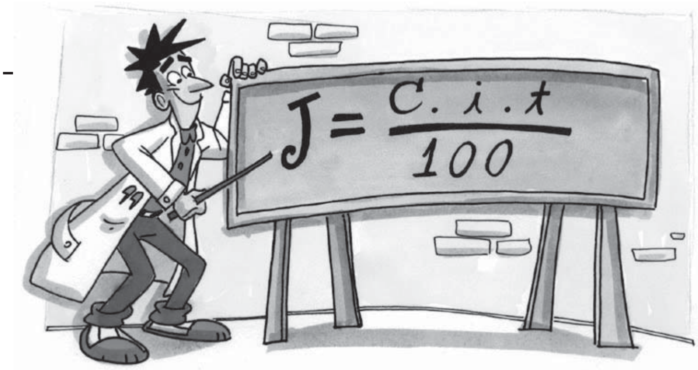
$$C = \text{R\$ } 200.000,00$$

Exercícios

29. Calcule a porcentagem (p), sendo dados:
    a) $C = 2.700$; $i = 3\%$
    b) $C = 2,1$; $i = 3,1\%$
    c) $C = 1.800$; $i = 6\%$
    d) $C = 3.100$; $i = 8\%$

30. Calcule o Capital ou Principal (C), sendo dados:
    a) $p = 600$; $i = 3\%$
    b) $p = 81.000$; $i = 9\%$
    c) $p = 320$; $i = 5\%$
    d) $p = 26.000$; $i = 13\%$

31. Calcule a taxa (i), dados:
    a) $C = 3.600$; $p = 36$
    b) $C = 5.400$; $p = 1.350$
    c) $C = 18.000$; $p = 90$
    d) $C = 0,4$; $p = 0,2$



JURO SIMPLES

Define-se como *juro* o lucro que obtemos (ou prejuízo) quando emprestamos (ou tomamos emprestado) determinada quantia, num prazo fixo, à taxa fixa.

Simbologia usada:

$J \rightarrow$ juro simples

$C \rightarrow$ principal ou capital

$i \rightarrow$ taxa

$t \rightarrow$ tempo

Os problemas de *juro simples* devem ser equacionados como os problemas de regras de três.

Assim:

(o capital 100) —— (em 1 ano) —— (produz i)

(o capital C) —— (em t anos) —— (produzirá j)

ou

$$\begin{array}{ccccc} 100 & \text{——} & 1 & \text{——} & i \\ C & \text{——} & t & \text{——} & j \end{array}$$

ou:

$$\frac{100}{C} \times \frac{1}{t} = \frac{i}{j} \rightarrow j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$$

a) para o tempo expresso em anos:

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$$

b) para o tempo expresso em meses:

$$t = \frac{m}{12} \rightarrow j = \frac{C \cdot i \cdot \dfrac{m}{12}}{100} = \frac{C \cdot i \cdot m}{1.200}$$

c) para o tempo expresso em dias:

$$t = \frac{d}{360} \rightarrow j = \frac{C \cdot i \cdot \dfrac{d}{360}}{100} = \frac{C \cdot i \cdot d}{36.000}$$

Exemplos

Calcule os juros simples produzidos pelo empréstimo de R$ 16.000,00 sobre a taxa de 3% durante:

a) 4 anos   b) 8 meses   c) 36 dias

Solução

a) $\begin{cases} j = ? \\ C = 16.000,00 \rightarrow j = \dfrac{C \cdot i \cdot t}{100} = \dfrac{16.000 \times 3 \times 4}{100} = 1.920,00 \\ i = 3\% \\ t = 4 \text{ anos} \qquad \text{Logo: } J = \text{R\$ } 1.920,00 \end{cases}$

b) $\begin{cases} j = ? \\ C = 16.000,00 \rightarrow j = \dfrac{C \cdot i \cdot m}{1.200} = \dfrac{16.000 \times 3 \times 8}{1.200} = 320,00 \\ i = 3\% \\ m = 8 \text{ meses} \qquad \text{Logo: } J = \text{R\$ } 320,00 \end{cases}$

c) $\begin{cases} j = ? \\ C = 16.000,00 \rightarrow j = \dfrac{C \cdot i \cdot d}{36.000} = \dfrac{16.000 \times 3 \times 36}{36.000} = 48,00 \\ i = 3\% \\ d = 36 \text{ dias} \qquad \text{Logo: } J = \text{R\$ } 48,00 \end{cases}$



Exercícios

32. Um comerciante tomou emprestado a quantia de R$ 18.000,00 num banco, por um prazo de 2 anos; sabendo-se que a taxa bancária é de 3%, pede-se: qual o juro que o mesmo deverá pagar?

33. Determine que Capital emprestado durante 5 anos, à taxa de 4%, rendeu juros no total de R$ 20.000,00.

34. Por quanto tempo foi emprestada uma quantia de R$ 18.000,00 à taxa de 5%, sabendo-se que rendeu juros de R$ 1.800,00?

35. Determine o juro produzido pelo empréstimo de R$ 8.100.000,00 à taxa de 4% durante 20 dias.

36. Determine o tempo necessário para que um Capital

duplique, aplicado à taxa de 4% (observação: faz-se $j = C$).

37. Determine por quantos meses deve-se emprestar uma quantia de R$ 930.000,00 para que renda juros de R$ 3.100,00, emprestada à taxa de 2% ao mês.



Respostas

1. Pernambuco: $\simeq$ 74,78 hab./km^2
   Santa Catarina: $\simeq$ 51,08 hab./km^2
   Tocantins: $\simeq$ 3,76 hab./km^2
   Paraíba: $\simeq$ 58,41 hab./km^2
   Minas Gerais: $\simeq$ 28,33 hab./km^2
   São Paulo: $\simeq$ 137,13 hab./km^2
   Maior densidade demográfica: São Paulo
   Menor densidade demográfica: Tocantins

2. a) 27 m e 32 m b) 864 m^2

3. a) 56 e 56
   b) 18 e 18
   c) 1.500 e 1.500
   d) 300 e 300

4. a) 30 ≠ 20. Não se verifica.
   b) 12 = 12. Se verifica.
   c) 220 ≠ 198. Não se verifica.
   d) 48 = 48. Se verifica.

5. a) $x = 10$ c) $x = 3$
   b) $x = 5$ d) $x = 135$

6. a) $x = 14$, $y = 6$
   b) $x = 42$, $y = 30$
   c) $x = 21$, $y = 15$
   d) $x = 42$, $y = 30$
   e) $x = 18$, $y = 15$

7. 7.000 empregados

8. 10 mulheres

9. Vera: 25 anos
   Clara: 5 anos

10. a) $\frac{9}{10}$ b) $-\frac{7}{3}$

11. 1970 $\simeq$ 2,96 gols/partida
    1974 $\simeq$ 2,55 gols/partida
    1978 $\simeq$ 2,68 gols/partida
    1982 $\simeq$ 2,80 gols/partida
    1986 $\simeq$ 2,53 gols/partida
    1990 $\simeq$ 2,21 gols/partida
    1994 $\simeq$ 2,71 gols/partida

12. 66,2 kg

13. $\simeq$ 155 cm

14. 20 e 30

15. 14, 21 e 35

16. 32, 40 e 48

17. 25 e 30

18. 21 e 12

19. 100 e 150

20. 30, 20, 12 e 10

21. 20 e 18

22. 60 e 32

23. 36, 75 e 80

24. R$ 45,20

25. 72 calças

26. 8 dias

27. 18 operários

28. 98 homens

29. a) $p = 81$ c) $p = 108$
b) $p = 0{,}0651$ d) $p = 248$

30. a) $C = 20.000$
b) $C = 900.000$
c) $C = 6.400$
d) $C = 200.000$

31. a) $i = 1\%$ c) $i = 0{,}5\%$
b) $i = 25\%$ d) $i = 50\%$

32. R$ 1.080,00

33. R$ 100.000,00

34. 2 anos

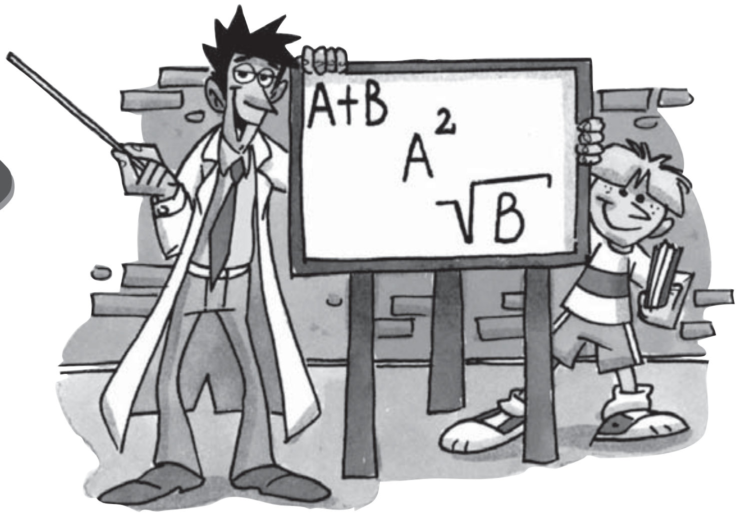
35. R$ 18.000,00

36. 25 anos

37. 2 meses



Capítulo 10



CÁLCULOS ALGÉBRICOS

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Agora você terá contato com uma parte muito importante no desenvolvimento da capacidade de raciocinar. Observará a presença de *letras* representando *números*, sem especificações.



Algumas vezes estas letras serão chamadas de *constantes* e outras vezes serão chamadas de *variáveis*.

É a *álgebra*.

TRADUÇÃO EM LINGUAGEM MATEMÁTICA

Procuraremos, com o auxílio do *conjunto de letras* do nosso *alfabeto latino*, representar ou traduzir em linguagem *matemática* as operações estudadas em *aritmética*.

Sejam, por exemplo, dois números quaisquer que representaremos por letras, como *A* e *B*.

Então, temos:

$A + B$ → representar a *soma* entre ambos.
$A - B$ → representar a *diferença* entre ambos.
$A \cdot B$ → representar o *produto* entre ambos.
$A : B$ → representar o *quociente* entre ambos.
A^2 → representar o *quadrado do número A*.
B^3 → representar o *cubo do número B*.
$\sqrt{A}$ → representar a *raiz quadrada do número A*
$\sqrt[7]{B}$ → representar a *raiz sétima do número B*.
... e assim por diante.

VARIÁVEIS E CONSTANTES

Denomina-se *variável* a letra que irá representar qualquer número ou um conjunto de números. Como exemplo teríamos: $2x$, onde x poderá representar qualquer número. Então $2x$ estará representando o dobro desse número.

Denomina-se *constante* (ou *coeficiente*) o caso contrário ao anterior. Assim, no exemplo $2x$, o 2 é uma constante, pois está representando uma quantidade que é o valor *dois*.

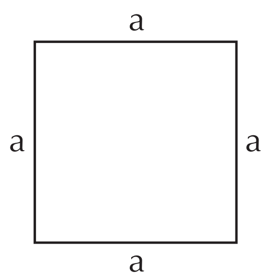
EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Expressões algébricas são expressões matemáticas que envolvem variáveis e constantes.

Existem inúmeras aplicações práticas para as expressões algébricas.



Por exemplo, para representar o perímetro do quadrado a seguir usaríamos a expressão p = 4a ou p, perímetro, é igual a 4 vezes o comprimento do lado do quadrado.



MONÔMIOS

Monômios são expressões algébricas representando o produto de constantes e variáveis.

$$2\,a^2b^3$$

constate — parte variável

Monômios semelhantes

Os monômios são ditos semelhantes quando a parte das variáveis de um são idênticas.

Exemplos

$3x$, $\frac{2}{3}x$ e $2x$, pois o x é a parte variável desses três monômios.

Operações com monômios

Adição

Para adicionar monômios semelhantes, somam-se as constantes e conserva-se a parte variável.

Exemplos

I. $3x + 4x = 7x$

II. $5x^2y + 7x^2y = 12x^2y$

Subtração

Na subtração de monômios semelhantes, subtraem-se as constantes e conserva-se a parte literal.

Exemplos

I. $3x - 2x = x$

II. $12xy^3z - 9xy^3z = 3xy^3z$

Multiplicação

Para multiplicar polinômios devemos nos lembrar da propriedade da multiplicação de potências de mesma base:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

e da propriedade associativa da multiplicação:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Exemplos

I. $4a^3b^2 \cdot 2ab^3c = 4 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot a \cdot b^2 \cdot b^3 \cdot c = 8a^4b^5c$

II. $12xy \cdot 2x^2z = 12 \cdot 2 \cdot x \cdot x^2 \cdot y \cdot z = 24x^3yz$

Divisão

Para dividir polinômios precisamos nos lembrar da propriedade da divisão de potências de mesma base:

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

sendo n e m números $\in \mathbb{N}$.

Exemplos

I. $25a^3y^2 : 5a^2y =$

$$= \frac{25}{5} \cdot \frac{a^3}{a^2} \cdot \frac{y^2}{y} = 5 \cdot a^{3-2} \cdot y^{2-1} = 5ay$$

II. $32x^4bz^2 : 8x^2bz =$

$$= \frac{32}{8} \cdot \frac{x^4}{x^2} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{z^2}{z} = 4x^2z$$

Potenciação

Para elevar um monômio a um determinado expoente devemos nos lembrar das seguintes propriedades:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Exemplos

I. $(4a^2bc^3)^2 = 4^2 \cdot a^{2 \cdot 2} \cdot b^{2 \cdot 1} \cdot c^{3 \cdot 2} = 16a^4b^2c^6$

II. $(-5xy^3z^2)^3 = (-5)^3 \cdot x^{3-1} \cdot y^{3 \cdot 3} \cdot z^{3 \cdot 2} = -125\ x^3y^9z^6$

Exercícios

1. Copie a tabela a seguir em seu caderno e preencha-a:

Monômios	Constantes	Parte variável
$2x^2$		
$5x^3y^4z$		
$-3a^2b^3$		
$\frac{5}{6}c^4$		
$-105x^3z^4$		

2. Efetue as operações:
   a) $3a^2y + 10a^2y$
   b) $12xz^4 + 35xz^4$
   c) $35xy - 12xy$
   d) $525z^2 - 304z^2$
   e) $3ab \cdot (-2a^3b^4c^3)$
   f) $5x \cdot 10x^3y^8z^4$
   g) $14a^2b^2c^3 : 7abc$
   h) $35x^3b^4 : 5x^2b$
   i) $(-2xy)^4$
   j) $(13a^2b)^2$

POLINÔMIOS

Define-se como *polinômio* toda expressão algébrica composta por monômios ou pela soma de monômios.

Os monômios que fazem parte do polinômio são chamados *termos*.

Exemplos

$5x^2y + 2b$ → polinômio de dois termos, chamado de *binômio*

$3x + 2yt - 3t$ → polinômio de três termos, chamado de *trinômio*

Grau de um polinômio

Define-se como *grau de um polinômio* o grau de seu *monômio* de maior grau na parte variável.

Exemplo 1

a) Polinômio de uma variável

$5x^2 + x + 2$
- $5x^2$ → monômio do segundo grau
- x → monômio do primeiro grau
- 2 → momômio de grau zero

Logo: $5x^2 + x + 2$ é um polinômio de 2º grau.

b) Polinômio de duas ou mais variáveis

$3x^2y^3 - 2a^2b^3c - 21$
- $3x^2y^3$ ... $(2 + 3 = 5)$ → monômio do quinto grau
- $2a^2b^3c$ ... $(2 + 3 + 1 = 6)$ → monômio do sexto grau
- 21 ... (0) → monômio de grau zero

Logo: $3x^2y^3 - 2a^2b^3c - 21$ é um polinômio de sexto grau.

Exemplo 2

Encontre o grau dos seguintes polinômios

a) $2x^3y$

b) $3x^2y^2t$

c) $3x^2y^3 + 4x^3 + 1$

d) $3x^2y^3 - 2$

e) $x^4 - y^2 + 2x - 1$

Solução

a) $(3 + 1 = 4)$ → quarto grau

b) $(2 + 2 + 1 = 5)$ → quinto grau

c) $(2 + 3 = 5) > 3 > 0$ → quinto grau

d) $(2 + 3 = 5) > 0$ → quinto grau

e) $4 > 2 > 1 > 0$ → quarto grau

Exercícios

3. Encontre o grau dos seguintes polinômios:

   a) $3x$

   b) $\sqrt{2} \cdot a$

   c) a^2b^3c

   d) $8x^6 - 15x^5 + 2x^4 - 1$

   e) $3a^2b^3 - 7a^4b^2 - 12a^3b^4$

   f) $3x^2 - 7x^4 + 4a^2b^3$

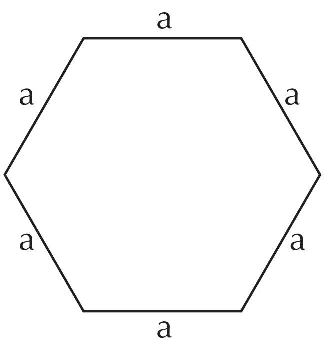
   g) $8 + 2ab - 12a^2$

   h) $7x^2 - 3y^4$



Valor numérico de expressões algébricas

Seja o perímetro do hexágono a seguir dado pela expressão algébrica $p = 6 \cdot a$.





Se definíssemos a = 3 e substituíssemos esse valor na expressão algébrica anterior, teríamos:

$$p = 6 \cdot 3 = 18$$

Ao número 18 desse exemplo dá-se o nome de *valor numérico* (V.N.).

Como podemos concluir, o valor numérico é o valor que obtemos quando sustituímos as letras da expressão algébrica por números e realizamos todas as operações indicadas.

Vamos fazer um pouco de contas?

Seja o polinômio $3x^2y^3 + 2z^2t - 3xt + z$. Vamos encontrar seu valor numérico sendo que as variáveis valem:

$x = 1,\ y = -2,\ z = -1,\ t = 3$

$\text{V.N.} = 3 \cdot (+1)^2 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-1)^2 \cdot (+3) - 3 \cdot (+1) \cdot (+3) + (-1)$

$\text{V.N.} = 3 \cdot (+1) \cdot (-8) + 2 \cdot (+1) \cdot (+3) - 3 \cdot (+1) \cdot (+3) + (-1)$

$\text{V.N.} = -24 + 6 - 9 - 1$

$\text{V.N.} = +6 - 34$

$\text{V.N.} = -28$

Agora, para o polinômio anterior, vamos descobrir o V.N. para $x = -1,\ y = \frac{1}{2},\ z = -\frac{2}{3},\ t = -\frac{1}{2}$.

Logo:

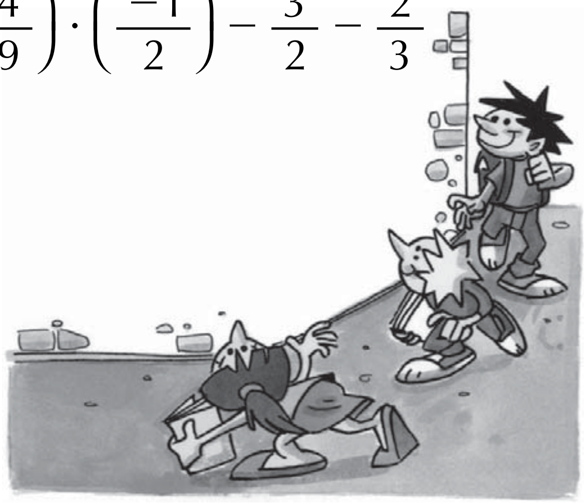
$$\text{V.N.} = 3\cdot(-1)^2\cdot\left(\frac{+1}{2}\right)^3+2\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)-3\cdot(-1)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)+\left(\frac{-2}{3}\right)$$

$$\text{V.N.} = 3 \cdot (+1) \cdot \left(+\frac{1}{8}\right) + 2 \cdot \left(+\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) - \frac{3}{2} - \frac{2}{3}$$

$$\text{V.N.} = \frac{3}{8} - \frac{4}{9} - \frac{3}{2} - \frac{2}{3}$$

$$\text{V.N.} = \frac{27 - 32 - 108 - 48}{72}$$

$$\text{V.N.} = \frac{-161}{72}$$



Exercícios

4. Em uma fábrica de botões para roupa, a produção de botões é representada pela seguinte expressão algébrica nb = 305 + 400t, onde nb representa o número de botões fabricados e t é o tempo de produção de botões em horas.
   Com base nessas informações, complete a tabela:

t (tempo)	nb (número de botões)
1	
2	
5	
10	

> **Dica:** Em 3 horas são produzidos
> nb = 350 + 400 · 3
> nb = 350 + 1.200
> nb = 1.550 botões

5. Suponhamos que a água consumida pelas residências de determinada cidade seja cobrada de acordo com a seguinte tabela:

De 0 — 10 kℓ	→ p = 10 + 2x
De 10 kℓ — 20 kℓ	→ p = 20 + 3x
De 20 kℓ — 40 kℓ	→ p = 30 + 4x

   onde p é o preço a ser pago pelo consumo de água em um mês e x é o número de kℓ de água consumidos.
   Responda:
   a) Quanto deverá pagar o dono da residência que consumir 5 kℓ de água em um mês?
   b) E se forem consumidos 15 kℓ de água?
   c) E se forem consumidos 30 kℓ de água?

Operações com polinômios

Adição

Para operar com a *adição* de expressões algébricas, devemos reduzi-las à forma mais simples, ou seja, necessitamos de uma *redução* de termos semelhantes (os que possuem a mesma parte variável). Para tanto, eliminamos os parênteses e somamos os termos semelhantes.

Exemplo

$(3x^2y - 7xy + 4xy^2 - 3x) + (+2xy^2 - 5x + 3xy) =$

$= 3x^2y - 4xy + 6xy^2 - 8x$

Subtração

Partindo da noção de que *subtração* é a operação inversa da *adição*, então devemos conservar os sinais dos termos do *minuendo* e trocar os do *subtraendo*, recaindo, portanto, na *adição*.

Exemplo

$(3x^2y - 7xy + 4xy^2 - 3x) - (+2xy^2 - 5x + 3xy) =$

$= 3x^2y - 7xy + 4xy^2 - 3x - 2xy^2 + 5x - 3xy =$

$= 3x^2y - 10xy + 2xy^2 + 2x$

onde:

$3x^2y - 7xy + 4xy^2 - 3x \rightarrow$ *minuendo*

e

$2xy^2 - 5x + 3xy \rightarrow$ *subtraendo*

Exercícios



6. Efetue a adição dos seguintes polinômios:
   a) $2a - 3b + 5c; 3b - 2a - 4c + d$
   b) $3a^2 - 3b^2 - 4c^3 - d; 2a^2 - b^2 + 2c^3 - 2d$
   c) $2ab - 2bc + 5cd; 3cd - ab + 2bc$
   d) $x^2 - 3x + 10; x^3 - 5x^2 - 1$
   e) $2a + 3b; 3a - 2b$
   f) $2m^2 - 3n^2 - 4mm; 5mn + 2n^2 - m^2$
   g) $2 - 3b^2 + a^2; 5 - 4a^2 - b^2$

7. Retome os exercícios propostos no exercício 6 e efetue a subtração dos polinômios nele enunciados, considerando-se a primeira coluna como coluna dos polinômios *minuendo* e a segunda como a coluna dos polinômios *subtraendo*.

Multiplicação

• *Monômio por polinômio*

A multiplicação neste caso consiste em determinarmos os produtos do monômio pelos termos do polinômio.

Exemplos

I. $2ab^2 \cdot (3a^2bc + 2ab^2 - 3) = 6a^3b^3c + 4a^2b^4 - 6ab^2$

pois:

$$(2ab^2) \cdot (+3a^2bc) = +6a^3b^3c$$
$$(2ab^2) \cdot (2ab^2) = +4a^2b^4$$
$$(2ab^2) \cdot (-3) = -6ab^2$$

II. $(3ab - 2c + 4d) \cdot (-3a^2b) = -9a^3b^2 + 6a^2bc - 12a^2bd$

pois:

$$(+3ab) \cdot (-3a^2b) = -9a^3b^2$$
$$(-2c) \cdot (-3a^2b) = +6a^2bc$$
$$(+4d) \cdot (-3a^2b) = -12a^2bd$$

• *Polinômio por polinômio*

A multiplicação neste caso consiste em determinarmos os produtos de cada termo do polinômio multiplicado pelos termos do polinômio multiplicando, um a um.



Exemplos

$(2a^2b - 3ab^3) \cdot (-2a + 5a^2b^2 - 3a^3b^5) =$

$$(+2a^2b) \cdot \begin{cases} -2a = -4a^3b \\ +5a^2b^2 = +10a^4b^3 \\ -3a^3b^5 = -6a^5b^6 \end{cases}$$

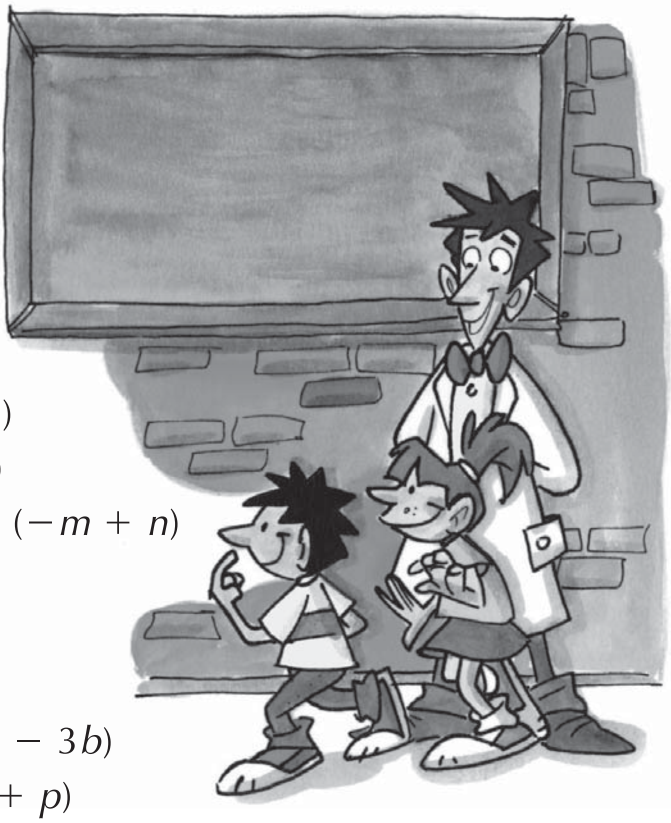
$$(-3ab^3) \cdot \begin{cases} -2a = +6a^2b^3 \\ +5a^2b^2 = -15a^3b^5 \\ -3a^3b^5 = +9a^4b^8 \end{cases}$$

Temos então:

$6a^2b^3 - 15a^3b^5 + 9a^4b^8 - 4a^3b + 10a^4b^3 - 6a^5b^6$

Exercício

8. Efetue a multiplicação dos seguintes polinômios:
   a) $(+3a) \cdot (-2a^2b)$
   b) $(-2a^2b^3) \cdot (-3a^3bc)$
   c) $(-3a^2b^2) \cdot (+4ac)$
   d) $(-2mn) \cdot (-m^2n)$
   e) $(+a^2b^3c) \cdot (-ab)$
   f) $(-ab^3c^2) \cdot (-2a^2b)$
   g) $(2a + b) \cdot (ab^2)$
   h) $(3ab - 2c) \cdot (-a^2b^3)$
   i) $(-3b^2c + 2bc^2) \cdot (-2ab^3)$
   j) $(+2abc - 3c + d) \cdot (ab^2)$
   l) $(-2m^2n - 3mn + 2m^2) \cdot (-m + n)$
   m) $(m + 2n) \cdot (m - 2n)$
   n) $(m + 2n) \cdot (m + 2n)$
   o) $(m - n) \cdot (m - n)$
   p) $(2 - 3a + 5b - 3c) \cdot (2a - 3b)$
   q) $(m + 2n - p) \cdot (m - 2n + p)$



Divisão com expressões algébricas



– Divisão de polinômio por monômio

A divisão neste caso consiste em determinarmos os quocientes de cada termo do polinômio dividendo pelo monômio divisor, recaindo no caso anterior.

Exemplo

$$(25a^4b^2 - 5a^3b^3 + 20a^2b^4) : (-5ab^2) = -5a^3 + a^2b - 4ab^2$$

$$\text{pois: } \begin{cases} +25a^4b^2 : -5ab^2 = -5a^3 \\ -5a^3b^3 : -5ab^2 = +1a^2b = +a^2b \\ -20a^2b^4 : -5ab^2 = -4ab^2 \end{cases}$$

Exercício

9. Efetue a divisão dos seguintes polinômios:
   a) $(+6a^2b^3) : (+3a)$
   b) $(-3a^2) : (-9a)$
   c) $(+49a^2b) : (+7ab)$
   d) $(+81a^2b^3m^4) : (-9ab^2m^2)$
   e) $(+7a^4b^3 - 14a^2b^2 + 21ab) ; (-7ab^2)$
   f) $(+27a^3b^2 - 9a^2b) : (-3ab)$
   g) $(+28m^3n^4 - 56\ m^4n^5 - 28m^6) : (-7m^2)$
   h) $(+26x^2y^3z^4 - 13xy^4z^2) : (+13xyz)$



PRODUTOS NOTÁVEIS

São produtos de polinômios muito usados no cálculo algébrico. Vejamos a seguir alguns casos especiais.

Quadrado da soma de dois números

Sejam *a* e *b* dois números quaisquer.

Sua soma será representada por $(a + b)$, e o seu quadrado por $(a + b)^2$.

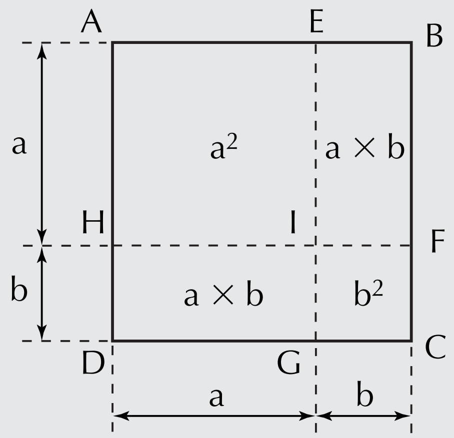
Assim:

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times \quad a + b \\ \hline + ab + b^2 \\ a^2 + ab \quad + \quad \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Portanto,

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

É possível relacionar a expressão anterior à área de um quadrado. Veja a seguir:



Exemplo

Efetue $(3x + 4y)^2$

Solução

- o quadrado de $(3x) \rightarrow (3x)^2 = 9x^2$
- o duplo produto de $(3x)$ por $(4y) \rightarrow 2(3x)(4y) = 24xy$
- o quadrado de $(4y) \rightarrow (4y)^2 = 16y^2$

Logo:

$(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$

Quadrado da diferença de dois números

Sejam a e b dois números quaisquer.

Sua diferença será representada por $(a - b)$, e o seu quadrado por $(a - b)^2$.

Assim:

$$\begin{array}{rrrr} & a & - & b \\ \times & a & - & b \\ \hline & -ab & + & b^2 \\ a^2 & -ab & + & \\ \hline a^2 & -2ab & + & b^2 \end{array}$$

Portanto,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemplo

Efetue $(3x - 4y)^2$

Solução

- o quadrado de $(3x) \rightarrow (3x)^2 = 9x^2$
- o duplo produto de $(3x)$ por $(4y) \rightarrow 2(3x)(4y) = 24xy$
- o quadrado de $(4y) \rightarrow (4y)^2 = 16y^2$

Logo:

$(3x - 4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$

Produto da soma pela diferença de dois números

Sejam a e b dois números quaisquer.

Sua soma será representada por $(a + b)$ e sua diferença por $(a - b)$; o produto, por $(a + b) \cdot (a - b)$.

Assim:

$$\begin{array}{rrrr} & a & + & b \\ \times & a & - & b \\ \hline & -\,ab & - & b^2 \\ a^2 & +\,ab & & + \\ \hline a^2 & & - & b^2 \end{array}$$

Portanto,

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Exemplo

Efetue $(3x + 4y) \cdot (3x - 4y)$

Solução

- o quadrado de $(3x) \rightarrow (3x)^2 = 9x^2$
- o quadrado de $(4y) \rightarrow (4y)^2 = 16y^2$

Logo:

$(3x + 4y) \cdot (3x - 4y) = 9x^2 - 16y^2$

Cubo da soma de dois números

Sejam a e b dois números quaisquer.

Sua soma será representada por $(a + b)$ e o seu cubo por: $(a + b)^3$

$= (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) =$

$= (a + b)^2 \cdot (a + b) =$

$= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b)$

Assim:

$$
\begin{array}{r}
a^2 + 2ab + b^2 \\
\times \quad a + b \\
\hline
a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
a^3 + 2a^2b + ab^2 \quad + \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}
$$

Portanto,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Exemplo

Efetue $(3x + 4y)^3$

Solução

- cubo de $(3x) \rightarrow (3x)^3 = 27x^3$
- o triplo do produto $(3x)^2$ por $4y \rightarrow$
  $\rightarrow 3(3x)^2 \cdot (4y) = 3 \cdot (9x^2) \cdot (4y) = 108x^2y$
- o triplo do produto de $(3x)$ por $(4y)^2 \rightarrow$
  $\rightarrow 3(3x)(4y)^2 = 3 \cdot (3x)(16y^2) = 144xy^2$
- o cubo de $(4y) \rightarrow (4y)^3 = 64y^3$

Logo:

$(3x + 4y)^3 = 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3$

Cubo da diferença de dois números

Sejam a e b dois números quaisquer.

Sua diferença será representada por $(a - b)$, e o seu cubo por $(a - b)^3$

$= (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b)$

$= (a - b)^2 \cdot (a - b)$

$= (a^2 - 2ab + b^2) \cdot (a - b)$

Assim

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ \times \quad a - b \\ \hline -\ a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ a^3 - 2a^2b + ab^2 \quad + \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

Portanto,

$$(a - b)^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exemplo

Efetue $(3x - 4y)^3$

Solução

- cubo de $(3x) \rightarrow (3x)^3 = 27x^3$
- o triplo do produto de $(3x)^2$ por $(4y) \rightarrow$
  $\rightarrow 3 \cdot (3x)^2 \cdot (4y) = 3 \cdot (9x^2) \cdot (4y) = 108x^2y$
- o triplo do produto de $(3x)$ por $(4y)^2 \rightarrow$
  $\rightarrow 3 \cdot (3x) \cdot (4y)^2 = 3 \cdot (3x) \cdot (16y^2) = 144xy^2$
- o cubo de $(4y) \rightarrow (4y)^3 = 64y^3$

Logo:

$(3x - 4y)^3 = 27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$

Em resumo temos:

Principais Produtos Notáveis

$(a + b)^2$	$=$	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2$	$=$	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b)$	$=$	$a^2 - b^2$
$(a + b)^3$	$=$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3$	$=$	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exercício



10. Calcule usando produtos notáveis:
   a) $(2x + 3y)^2$
   b) $(2x - 3y)^2$
   c) $(2x + 3y)(2x - 3y)$
   d) $(2x + 3y)^3$
   e) $(2x - 3y)^3$

Respostas

1.

Monômios	Constantes	Parte variável
$2x^2$	2	x^2
$5x^3y^4z$	5	x^3y^4z
$-3a^2b^3$	-3	a^2b^3
$\frac{5}{6}c^4$	$\frac{5}{6}$	c^4
$-105x^3z^4$	-105	x^3z^4

2. a) $13a^2y$
   b) $47xz^4$
   c) $23xy$
   d) $221z^2$
   e) $-6a^4b^5c^3$
   f) $50x^4y^8z^4$
   g) $2abc^2$
   h) $7xb^3$
   i) $16x^4y^4$
   j) $169a^4b^2$

3. a) primeiro grau
   b) primeiro grau
   c) sexto grau
   d) sexto grau
   e) sétimo grau
   f) quinto grau
   g) segundo grau
   h) quarto grau

4.

t (tempo)	nb (número de botões)
1	705
2	1.105
5	2.305
10	4.305

5. a) R$ 20,00
   b) R$ 65,00
   c) R$ 150,00

6. a) $c + d$
   b) $5a^2 - 4b^2 - 2c^3 - 3d$
   c) $ab + 8cd$
   d) $x^3 - 4x^2 - 3x + 9$
   e) $5a + b$
   f) $m^2 - n^2 + mn$
   g) $7 - 4b^2 - 3a^2$

7. a) $4a - 6b + 9c - d$
   b) $a^2 - 2b^2 - 6c^3 + d$

c) $3ab - 4bc + 2cd$

d) $-x^3 + 6x^2 - 3x + 11$

e) $-a + 5b$

f) $3m^2 - 5n^2 - 9mn$

g) $-3 - 2b^2 + 5a^2$

8. a) $-6a^3b$

b) $+6a^5b^4c$

c) $-12a^3b^2c$

d) $+2m^3n^2$

e) $-a^3b^4c$

f) $+2a^3b^4c^2$

g) $2a^2b^2 + ab^3$

h) $-3a^3b^4 + 2a^2b^3c$

i) $6ab^5c - 4ab^4c^2$

j) $2a^2b^3c - 3ab^2c + ab^2d$

l) $2m^3n + 5m^2n - 2m^3 -$
$- 2m^2n^2 - 3mn^2$

m) $m^2 - 4n^2$

n) $m^2 + 4mn + 4n^2$

o) $m^2 - 2mn + n^2$

p) $4a - 6a^2 + 19ab - 6ac -$
$- 6b - 15b^2 + 9bc$

q) $m^2 - 4n^2 - p^2 + 4np$

9. a) $2ab^3$

b) $\frac{a}{3}$

c) $7a$

d) $-9abm^2$

e) $-a^3b + 2a - \frac{3}{b}$

f) $-9a^2b + 3a$

g) $-4mn^4 + 8m^2n^5 + 4m^4$

h) $2xy^2z^3 - y^3z$

10. a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

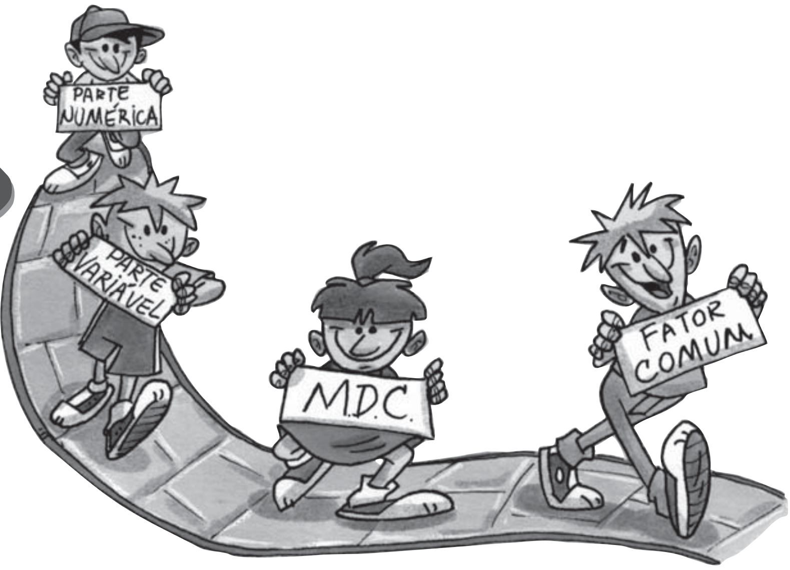
c) $4x^2 - 9y^2$

d) $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

e) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$



Capítulo 11



FATORAÇÃO ALGÉBRICA

Casos simples de fatoração de expressões algébricas

Primeiro caso: **Fatores em comum – Fatores em evidência**

Consiste em separarmos do polinômio dado o fator comum, transformando-o num produto de dois fatores, onde um dos fatores é o *fator comum* e o outro, que será colocado entre parênteses, obtido pela divisão do polinômio pelo fator comum.

Este fator será determinado da seguinte maneira:

- isola-se a parte numérica da parte variável;
- extrai-se o mdc da parte numérica, que será a parte numérica do fator comum;
- a parte variável do fator comum será determinada considerando-se a variável (ou variáveis) comum a todos os termos do polinômio elevada ao menor expoente com que a variável aparece no polinômio dado.

Exemplo 1

$5a^3b^4c - 25a^2b^3c^2d + 15a^5b^2c^3d^2$



Solução

- parte numérica: 5, 25, 15
- parte variável: a^3b^4c, $a^2b^3c^2d$, $a^5b^2c^3d^2$
- mdc (5, 25, 15) = 5
- fator comum: $5a^2b^2c$

Logo:

$$(5a^3b^4c - 25a^2b^3c^2d + 15a^5b^2c^3d^2) : (5a^2b^2c) =$$
$$= ab^2 - 5bcd + 3a^3c^2d^2$$

Temos então:

$$5a^3b^4c - 25a^2b^3c^2d + 15a^5b^2c^3d^2 =$$
$$= 5a^2b^2c \cdot (ab^2 - 5bcd + 3a^3c^2d^2)$$

Exemplo 2

$$\frac{a^5b^4}{9} + \frac{a^4b^5}{3} - \frac{a^2b^6}{27}$$



Solução

- parte numérica: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}$
- parte variável: a^5b^4, a^4b^5, a^2b^6
- mdc$\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}\right) = \frac{1}{3}$
- fator comum: $\frac{1}{3}a^2b^4 = \frac{a^2b^4}{3}$

Logo:

$$\frac{a^5b^4}{9} + \frac{a^4b^5}{3} - \frac{a^2b^6}{27} = \frac{a^2b^4}{3}\left(\frac{a^3}{3} + a^2b - \frac{b^2}{9}\right)$$

Exemplo 3

$$4x^m - 3x^{m+1} - 2x^{m+2}$$



Solução

- parte numérica: 4, 3, 2
- parte variável: x^m, x^{m+1}, x^{m+2}

onde: $\begin{cases} x^m = x^m \cdot x^0 \\ x^{m+1} = x^m \cdot x^1 \\ x^{m+2} = x^m \cdot x^2 \end{cases}$

- mdc(4, 3, 2) = 1
- fator comum: $1 \cdot x^m \cdot x^0 = x^m$

Logo:

$4x^m - 3x^{m+1} - 2x^{m+2} = x^m \cdot (4 - 3x - 2x^2)$

pois: $m < m + 1 < m + 2$ ... para qualquer valor de m

Exercício

1. Coloque em evidência o fator comum nos seguintes polinômios:
   a) $mx + my$
   b) $9m^2 - 18m^3$
   c) $ax - ay$
   d) $13a^2x^3 - 15ax^3$
   e) $m^2n - mn^2$
   f) $15a^2b^2 - 5a^3b^2$
   g) $14a^2b^3c^2 - 12a^3b^2c^4 - 16a^4b^2c$
   h) $2a^2 - 3a$
   i) $8a^3b^2 - 16a^2b^3 - 24ab^4 - 4ab^5$

Segundo caso: **Fatoração por agrupamento**

A fatoração neste caso consiste em agruparmos os termos do polinômio em vários grupos, de tal modo que, fatorando-se cada um desses grupos, se obtenha um *fator comum*, o qual

será colocado em evidência. É o caso da existência de fatores comuns somente a alguns termos e não a todos.

Assim, temos:

Exemplo 1

$$3a^2 + ac + 6ab + 2bc$$

Solução

- formam-se os grupos $(3a^2 + ac)$ e $(6ab + 2bc)$ colocando-se no primeiro em evidência a e no segundo $2b$.

Logo:

$$3a^2 + ac + 6ab + 2bc = a(3a + c) + 2b(3a + c)$$

obtendo-se neste caso como fator comum: $(3a + c)$, que deverá ser colocado em evidência, obtendo-se:

$$3a^2 + ac + 6ab + 2bc =$$

$$= a(3a + c) + 2b(3a + c) = (3a + c) \cdot (a + 2b)$$

Exemplo 2

$$ay + by + ax + bx$$

Solução

$$= y(a + b) + x(a + b) =$$

$$= (a + b) + (y + x)$$

Exemplo 3

$$4ac - 10ad - 6bc + 15bd$$

Solução

$$= 2a(2c - 5d) - 3b(2c - 5d) =$$

$$= (2c - 5d) \cdot (2a - 3b)$$

Exercício

2. Fatore por agrupamento os seguintes polinômios:
   a) $3ab - 6bc - ad + 2cd$
   b) $am + bm + an + bn$
   c) $6mx - 4my + 9nx - 6ny$
   d) $abx + aby + cdx + cdy$
   e) $2ax - 3ay + 2bx - 3by$
   f) $6ax - 4ay - 9bx + 6by$
   g) $3ac - 9ad - 2bc + 6bd$
   h) $3abx - 3aby - 2cdx + 2cdy$
   i) $6abx + 9aby - 6cdy - 4cdx$

Terceiro caso: **Diferença de dois quadrados**

Está baseado no *produto notável* da soma de dois números pela diferença entre eles, ou seja:

$$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$$

Para fatorar uma expressão algébrica formada pela diferença de dois quadrados, procedemos do seguinte modo:

- extrai-se a raiz quadrada de cada termo;
- a seguir forma-se o produto da soma pela diferença entre as raízes determinadas.

Assim, temos:

Exemplo 1

$$x^2 - 4y^2$$

Solução

- extraem-se as raízes quadradas de cada termo:

$$x^2 \rightarrow \sqrt{x^2} = x$$

$$4y^2 \rightarrow \sqrt{4y^2} = 2y$$

- forma-se o produto entre as raízes determinadas da soma pela diferença entre elas.

Logo:

$$x^2 - 4y^2 = (x + 2y) \cdot (x - 2y)$$

Exemplo 2

$$25a^2 - 36b^2$$

Solução

$$25a^2 \rightarrow \sqrt{25a^2} = 5a$$

$$36b^2 \rightarrow \sqrt{36b^2} = 6b$$

Logo:

$$25a^2 - 36b^2 = (5a + 6b) \cdot (5a - 6b)$$

Exemplo 3

$$16a^2b^8 - 15a^4b^6$$

Solução

$$16a^2b^8 - 15a^4b^6 = a^2b^6(16b^2 - 15a^2)$$

$$16b^2 \rightarrow \sqrt{16b^2} = 4b$$

$$15a^2 \rightarrow \sqrt{15a^2} = a\sqrt{15}$$

Logo:

$$16a^2b^8 - 15a^4b^6 = a^2b^6(4b + a \cdot \sqrt{15}) \cdot (4b - a \cdot \sqrt{15})$$



Exercício

3. Fatore por diferença de dois quadrados os seguintes polinômios:

a) $4m^2 - 9n^2$

b) $a^2 - b^2$

c) $a^2 - 1$

d) $16a^4 - 25b^6c^4$

e) $m^4 - n^4$

f) $25a^2 - 16a^4$

g) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

h) $\dfrac{m^2}{n^2} - \dfrac{p^2}{q^2}$

Quarto caso: **Fatoração de um trinômio que é quadrado perfeito**

Está baseado nos produtos notáveis:

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$
$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

Para fatorar um trinômio quadrado perfeito devemos proceder da seguinte maneira:

- extraem-se as raízes quadradas dos termos de "grau dois" e "grau zero" em relação à variável considerada;
- a seguir verifica-se se o termo de "grau um" é igual ao dobro das raízes encontradas em relação aos termos de graus dois e zero.

Assim, temos:

Exemplo 1

$$9m^2 + 12mn + 4n^2$$

Solução

- extraem-se as raízes quadradas dos termos de grau dois e grau zero em relação à variável, por exemplo: *m*

$$9m^2 \rightarrow \sqrt{9m^2} = 3m$$

$$4n^2 \rightarrow \sqrt{4n^2} = 2n$$

- verificação de se o termo de grau um em relação a *m* é o dobro do produto das raízes encontradas:

$$2 \cdot (3m) \cdot (2n) = 12mn$$

A atribuição do sinal + ou − será de acordo com o sinal desse duplo produto no exercício proposto.

Neste caso → +

Logo:

$$9m^2 + 12mn + 4n^2 = (3m + 2n)^2$$

Exemplo 2

$$9m^2 - 12mn + 4n^2$$

Solução

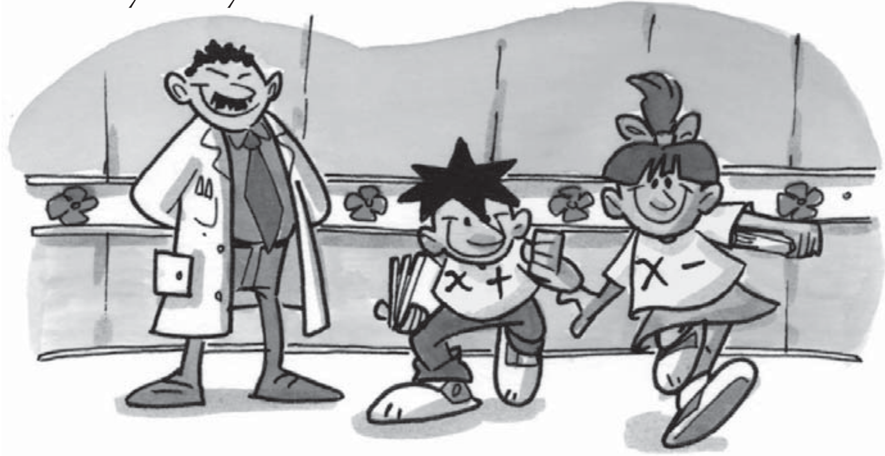
- análoga à anterior, somente neste caso o duplo produto tem sinal negativo (−).

Logo:

$$9m^2 - 12mn + 4n^2 = (3m - 2n)^2$$

Exercício

4. Fatore os trinômios quadrados perfeitos seguintes:
   a) $a^2 + 2ab + b^2$
   b) $a^2 - 2ab + b^2$
   c) $9x^2 + 30xy + 25y^2$
   d) $4x^2 - 12xy + 9y^2$
   e) $9a^2 + 12a + 4$
   f) $1 - 4a^2 + 4a^4$
   g) $a^6 + 6a^3b + 9b^2$



Quinto caso: **Trinômio do segundo grau**

É o caso da decomposição do trinômio do segundo grau no produto de dois binômios do primeiro grau tendo-se um fator comum, ou seja:

$$x^2 + Sx + P = x^2 + (a + b)x + ab = (x + a) \cdot (x + b)$$

onde S é a soma de dois números a e b e P é o produto deles.

Assim, temos:

Exemplo 1

$$x^2 + 7x + 10$$

Solução

- Identificando-se com: $x^2 + Sx + P$, obtemos:

$$S = +7 \ \text{ e } \ P = +10$$

O problema consiste em determinarmos dois números, tais que:

$$S = +7 \ \text{ e } \ P = +10$$

- Se $P = +10 \rightarrow P > 0$, conclui-se que os dois números possuem mesmo sinal, ou ambos são positivos ou ambos são negativos.

Logo:

$$(+1, +10); (-1, -10); (+2, +5); (-2, -5)$$

- Se $S = +7 \rightarrow$ considerando os 4 pares observamos que a única possibilidade de soma $+7$ são os números:

$$+2, +5$$

Portanto:

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2) \cdot (x + 5)$$

Exemplo 2

$$x^2 - 7x + 10$$

Solução

- Identificando-se com $x^2 + Sx + P$, obtemos:

$$S = -7 \ \text{ e } \ P = +10$$

- Se $P = +10 \rightarrow P > 0$, conclui-se que ambos têm o mesmo sinal, ou ambos positivos ou ambos negativos.

Logo:

$$(+1, +10), (-1, -10), (+2, +5), (-2, -5)$$

- Se $S = -7 \rightarrow$ a única possibilidade de soma -7 são os números:

$$(-2, -5)$$

Portanto:

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2) \cdot (x - 5)$$

Exemplo 3

$$x^2 + 2x - 15$$

Solução

- Identificando-se com: $x^2 + Sx + P$, obtemos:

$$S = +2 \ \text{e} \ P = -15$$

- Se $P = -15 \rightarrow P < 0$, conclui-se que ambos têm sinais diferentes, um é positivo e o outro é negativo.

Logo:

$$(+1, -15), (-1, +15), (+3, -5), (-3, +5)$$

- Se $S = +2 \rightarrow$ a única possibilidade de se obter soma $+2$ é com os números:

$$(-3, +5), \text{ pois } -3 + 5 = +2$$

Portanto:

$$x^2 + 2x - 15 = (x - 3) \cdot (x + 5)$$

Exemplo 4

$$x^2 - 2x - 15$$

Solução

- Identificando-se com: $x^2 + Sx + P$, obtemos:

$$S = -2 \ \text{e} \ P = -15$$

- Se $P = -15 \rightarrow P < 0$, conclui-se que ambos têm sinais diferentes.

Logo:

$$(+1, -15), (-1, +15), (+3, -5), (-3, +5)$$

• Se $S = -2$

Logo, os números são:

$$(+3, -5), \text{ pois } +3 - 5 = -2$$

Portanto:

$$x^2 - 2x - 15 = 5 = (x + 3) \cdot (x - 5)$$

Exercício

5. Fatore os trinômios seguintes:

a) $x^2 + 3x + 2$

b) $x^2 - 3x + 2$

c) $x^2 + 7x + 12$

d) $x^2 - 9x + 18$

e) $y^2 + 7y + 6$

f) $y^2 - 9y + 14$

MÁXIMO DIVISOR COMUM ENTRE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS (mdc)

Dadas duas ou mais expressões algébricas, definimos como o máximo divisor comum (mdc) entre elas a expressão algébrica de *maior* grau que é divisora das expressões algébricas dadas.

O método prático para determinação do mdc é descrito a seguir.

• Faz-se a decomposição das expressões algébricas em fatores primos.

• A seguir, determina-se o produto dos fatores comuns a todas, elevados aos de seus *menores* expoentes.

Exemplo 1

$$\text{mdc}(12ab^3c^2d, 9a^2b^2cd^3, 18a^4b^4c^3)$$

Solução

• Decomposição em fatores primos:

$$12ab^3c^2d = 2^2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^3 \cdot c^2 \cdot d$$
$$9a^2b^2cd^3 = 3^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c \cdot d^3$$
$$18a^4b^4c^3 = 2 \cdot 3^2 \cdot a^4 \cdot b^4 \cdot c^3$$

• Fatores comuns a todas as expressões algébricas, elevados aos seus *menores* expoentes, que constituirão o mdc entre as expressões algébricas dadas:

$$\text{mdc}(12ab^3c^2d, 9a^2b^2cd^3, 18a^4b^4c^3) = 3ab^2c$$

Exemplo 2

$$\text{mdc}[(a^2 - 2ab + b^2), (a - b), (a^2 - b^2)]$$

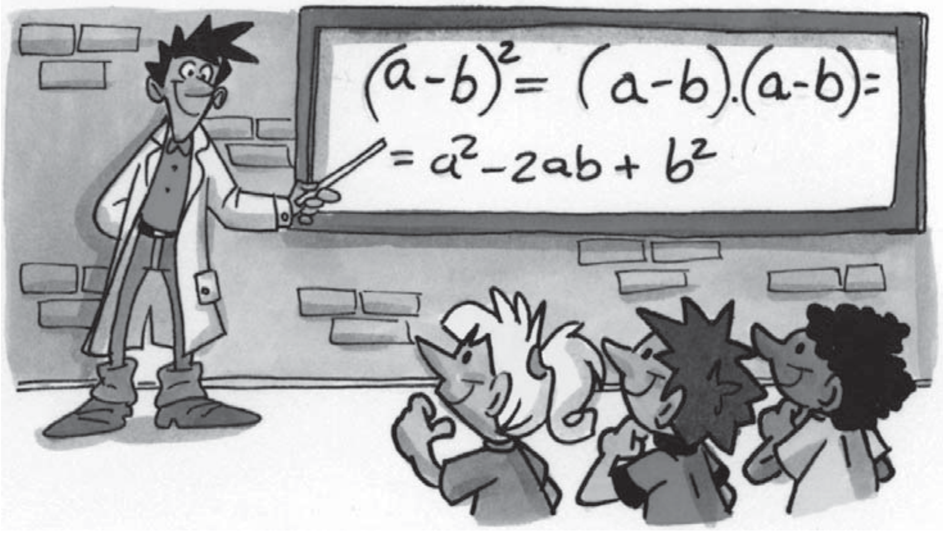
Solução

• Decomposição em fatores primos:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a - b = (a - b)$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

• Fatores comuns a todas as expressões algébricas, elevados aos seus *menores* expoentes, que constituirão o mdc entre as expressões algébricas dadas:

$$\text{mdc}[(a^2 - 2ab + b^2), (a - b), (a^2 - b^2)] = (a - b)$$



MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM ENTRE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS (mmc)

Dadas duas ou mais expressões algébricas, definimos como mínimo múltiplo comum (mmc) entre elas a expressão algébrica de *menor* grau que é divisível por todas as expressões algébricas dadas.

Método prático para determinação do mmc

• Faz-se a decomposição das expressões algébricas em fatores primos.

• A seguir, determina-se o produto dos fatores *comuns* e *não comuns* elevados aos seus *maiores* expoentes.

Exemplo 1

$$\text{mdc}(12ab^3c^2d,\ 9a^2b^2cd^3,\ 18a^4b^4c^3)$$

Solução

• Decomposição em fatores primos:

$$12ab^3c^2d = 2^2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^3 \cdot c^2 \cdot d$$
$$9a^2b^2cd^3 = 3^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c \cdot d^3$$
$$18a^4b^4c^3 = 2 \cdot 3^2 \cdot a^4 \cdot b^4 \cdot c^3$$

• Fatores comuns a todas as expressões algébricas, elevados aos seus *maiores* expoentes, que constituirão o mmc entre as expressões algébricas dadas:

$$\text{mmc}(12ab^3c^2d,\ 9a^2b^2cd^3,\ 18a^4b^4c^3) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot a^4 \cdot b^4 \cdot c^3 \cdot d^3$$
$$= 4 \cdot 9 \cdot a^4 \cdot b^4 \cdot c^3 \cdot d^3$$
$$= 36\ a^4b^4c^3d^3$$

Exemplo 2

$$\text{mmc}[(a^2 - 2ab + b^2), (a - b), (a^2 - b^2)]$$

Solução

• Decomposição em fatores primos:

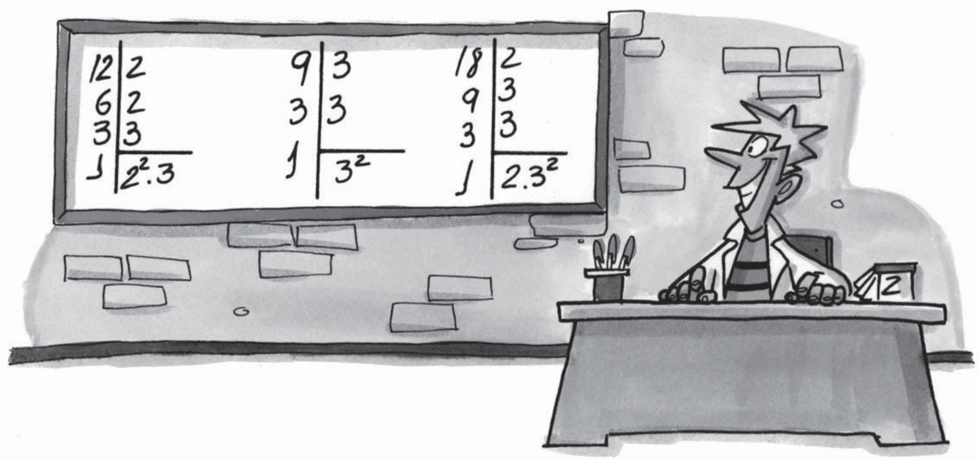
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$a - b = (a - b)$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

• Fatores comuns e não comuns a todas as expressões algébricas, elevados aos seus *maiores* expoentes, que constituirão o mmc entre as expressões algébricas dadas:

$$\text{mmc}[(a^2 - 2ab + b^2), (a - b), (a^2 - b^2)] = (a - b) \cdot (a + b)$$



Exercícios

6. Determine o mdc entre as expressões algébricas a seguir:

a) $25a^2b^5c^2$, $20a^4b^2cd^2$

b) $5ab$, $3cd$

c) $12ab^2c^3d^3$, $24a^3b^4c^2d$

d) $6a^2b^3$, $3a^3b^2c$

e) $2ab^2$, $3a^2bc$

f) $2ab$, $3a^2$, $6a^3b^2$

g) $2a^2 + 4ab + 2b^2$, $a + b$

h) $3m^3 - 6m^2n$, $12m^2n$

7. Determine o mmc entre as expressões algébricas do exercício anterior.

Respostas

1. a) $m(x + y)$
   b) $9m^2(1 - 2m)$
   c) $a(x - y)$
   d) $ax^3(13a - 15)$
   e) $mn(m - n)$
   f) $5a^2b^2(3 - a)$
   g) $2a^2b^2c(7bc - 6ac^3 - 8a^2)$
   h) $a(2a - 3)$
   i) $4ab^2(2a^2 - 4ab - 6b^2 - b^3)$

2. a) $(a - 2c) \cdot (3b - d)$
   b) $(a + b) \cdot (m + n)$
   c) $(3x - 2y) \cdot (2m + 3n)$
   d) $(x + y) \cdot (ab + cd)$
   e) $(a + b) \cdot (2x - 3y)$
   f) $(2a - 3b) \cdot (3x - 2y)$
   g) $(3a - 2b) \cdot (c - 3d)$
   h) $(3ab - 2cd) \cdot (x - y)$
   i) $(3ab - 2cd) \cdot (2x + 3y)$

3. a) $(2m + 3n) \cdot (2m - 3n)$
   b) $(a + b) \cdot (a - b)$
   c) $(a + 1) \cdot (a - 1)$
   d) $(4a^2 + 5b^3c^2)(4a^2 - 5b^3c^2)$
   e) $(m^2 - \text{n}^2) \cdot (m^2 + \text{n}^2)$
   f) $a^2 \cdot (5 + 4a) \cdot (5 - 4a)$
   g) $4ab$
   h) $\left(\dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q}\right)\left(\dfrac{m}{n} - \dfrac{p}{q}\right)$

4. a) $(a + b)^2$
   b) $(a - b)^2$
   c) $(3x + 5y)^2$
   d) $(2x - 3y)^2$
   e) $(3a + 2)^2$
   f) $(1 - 2a^2)^2$
   g) $(a^3 + 3b)^2$

5. a) $(x + 1)(x + 2)$
   b) $(x - 1)(x - 2)$
   c) $(x + 3)(x + 4)$
   d) $(x - 3)(x - 6)$
   e) $(y + 1)(y + 6)$
   f) $(y - 2)(y - 7)$

6. a) $5a^2b^2c$
   b) 1
   c) $12ab^2c^2d$
   d) $3a^2b^2$
   e) ab
   f) a
   g) $(a + b)$
   h) $3m^2$

7. a) $100a^4b^3c^2d^2$
   b) $15abcd$
   c) $24a^3b^1c^3d^3$
   d) $6a^3b^3c$
   e) $6a^2b^2c$
   f) $6a^3b^2$
   g) $2(a + b)^2$
   h) $12m^2n(m - 2n)$



Capítulo 12



FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Denominamos *fração algébrica* o quociente entre duas expressões algébricas $A(x)$ e $B(x)$, tal que:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \text{ com } B(x) \neq 0$$

Simplificação de frações algébricas

Simplificar uma fração é reduzi-la à sua forma mais simples. Para isso, devemos dividir os polinômios numerador e denominador pelo mdc entre eles.

Exemplo 1

$$\frac{20a^3b^4c^2}{25a^4bcd^3}$$



Solução

$\text{mdc}(20a^3b^4c^2,\ 25a^4bcd^3) = 5a^3bc$

Assim:

$$\frac{(20a^3b^4c^2) : 5a^3bc}{(25a^4bcd^3) : 5a^3bc} = \frac{4b^3c}{5ad^3}$$

Exemplo 2

$$\frac{3a^2b - 3ab - 36b}{2a^3 - 6a^2 - 36a}$$

Solução

$$\begin{cases} 3a^2b - 3ab - 36b = 3b(a^2 - a - 12) = 3b(a + 3)(a - 4) \\ 2a^3 - 6a^2 - 36a = 2a(a^2 - 3a - 18) = 2a(a + 3)(a - 6) \end{cases}$$

$$\text{mdc}[(3a^2b - 3ab - 36b), (2a^3 - 6a^2 - 36a)] = (a + 3)$$

$$\frac{3a^2b - 3ab - 36b}{2a^3 - 6a^2 - 36a} = \frac{3b(a + 3)(a - 4) : (a + 3)}{2a(a + 3)(a - 6) : (a + 3)} = \frac{3b(a - 4)}{2a(a - 6)}$$

Exercício

1. Simplifique as seguintes frações algébricas:

a) $\dfrac{5a^3b^4c^2}{25a^2b^5c}$

b) $\dfrac{24m^2n^3}{6m^4np^2}$

c) $\dfrac{36a^2b}{6a^3b^4c^3}$

d) $\dfrac{25a^4b^4c^4}{5a^3b^3c^3}$

Redução de frações algébricas ao mesmo denominador

A redução de frações algébricas ao mesmo denominador é feita do mesmo modo que com as frações aritméticas, ou seja:

- extrai-se o mmc entre as expressões algébricas que são denominadores;
- divide-se o mmc entre as expressões pelos denominadores de cada fração algébrica dada;
- multiplica-se o quociente assim obtido pelos respectivos numeradores.

Exemplo

$$\frac{2a}{3(a+b)}, \frac{1}{(a+b)^2}, \frac{a-b}{5(a+b)^2}$$

Solução

$\text{mmc}[3(a+b), (a+b)^2, 5(a+b)^2] = 3 \cdot 5(a+b)^2 = 15(a+b)^2$

Assim:

$15(a+b)^2 : 3(a+b) = 5(a+b) \rightarrow (a+b) \cdot 2a = 10a(a+b)$

$15(a+b)^2 : (a+b)^2 = 15 \rightarrow 15 \cdot 1 = 15$

$15(a+b)^2 : 5(a+b)^2 = 3 \rightarrow 3 \cdot (a-b) = 3(a-b)$

Teremos então:

$$\frac{10a(a+b)}{15(a+b)^2}, \frac{15}{15(a+b)^2}, \frac{3(a-b)}{15(a+b)^2}$$

Exercício

2. Reduza ao mesmo denominador as frações algébricas seguintes:

a) $\frac{x}{a}, \frac{3y}{4a^2}, \frac{4z}{a^4}$

b) $\frac{3b}{5m^3}, \frac{2c}{3am^2}$

c) $\frac{2}{3am^2}, \frac{4b}{9a^2m}, \frac{5c}{6a^3}, \frac{5b^2}{18a^4m^3}$

d) $\frac{3a^2}{m}, \frac{8a}{m+x}, \frac{5}{m-x}$

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Adição e subtração

Primeiro caso: **Frações com denominadores iguais**

Para resolver este caso, devemos conservar o denominador e operar com os respectivos numeradores.

Exemplo 1

$$\frac{5a^2b}{3x} + \frac{3a^2b}{3x} = \frac{5ab^2 + 3a^2b}{3x}$$



Exemplo 2

$$\frac{7ab}{8d^2} - \frac{3}{8d^2} = \frac{7ab - 3}{8d^2}$$

Segundo caso: **Frações com denominadores diferentes**

Para resolver este caso, devemos primeiramente reduzi-las ao mesmo denominador e em seguida proceder como no caso anterior.

Exemplo 1

$$\frac{3ab}{2b} + \frac{4ac}{5c}$$

mmc($2b$, $5c$) = $10bc$

$10bc : 2b = 5c \rightarrow 5c \cdot 3ab = 15abc$

$10bc : 5c = 2b \rightarrow 2b \cdot 4ac = 8abc$

Teremos então:

$$\frac{15abc + 8abc}{10bc} = \frac{23abc}{10bc} = \frac{23a}{10}$$

Exemplo 2

$$\frac{3ac}{5a} - \frac{2bc}{4b}$$

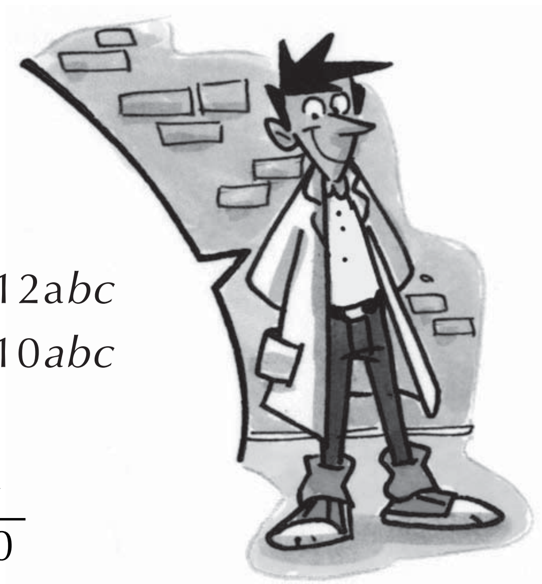
mmc($5a$, $4b$) = $20ab$

$20ab : 5a = 4b \rightarrow 4b \cdot 3ac = 12abc$

$20ab : 4b = 5a \rightarrow 5a \cdot 2bc = 10abc$

Teremos então:

$$\frac{12abc - 10abc}{20ab} = \frac{2abc}{20ab} = \frac{c}{10}$$



Multiplicação

O produto de frações algébricas é obtido formando-se uma nova fração onde o numerador será igual ao produto dos numeradores e o denominador será determinado multiplicando-se os respectivos denominadores.

Exemplo 1

$$\frac{3a}{2b} \cdot \frac{5c}{4d} = \frac{15ac}{8bd}$$

Exemplo 2

$$\frac{9a}{2b} \cdot \frac{3c}{4d} \cdot \frac{5e}{7f} = \frac{135ace}{56bdf}$$

Divisão

Para efetuar a divisão entre frações algébricas, multiplica-se a primeira fração pela segunda invertida.

Exemplo 1

$$\frac{3a}{2b} : \frac{5c}{4d} = \frac{3a}{2b} \cdot \frac{4d}{5c} =$$

$$= \frac{12ad}{10bc} = \frac{6ad}{5bc}$$

Exemplo 2

$$\frac{3ab^2}{4c^2} : \frac{a^2b^3}{3c^3} = \frac{3ab^2}{4c^2} \cdot \frac{3c^3}{a^2b^3} =$$

$$= \frac{9ab^2c^3}{4a^2b^3c^2} = \frac{9c}{4ab}$$

Potenciação

Para efetuar a potenciação de uma fração algébrica, elevamos ambos, numerador e denominador, à potência indicada.

Exemplo 1

$$\left(\frac{2a^2m}{3bn^3}\right)^3$$

$$\begin{cases}(2a^2m)^3 = (2)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot (m)^3 = 8a^6m^3 \\ (3bn^3)^3 = (3)^3 \cdot (b)^3 \cdot (n^3)^3 = 27b^3n^9\end{cases}$$

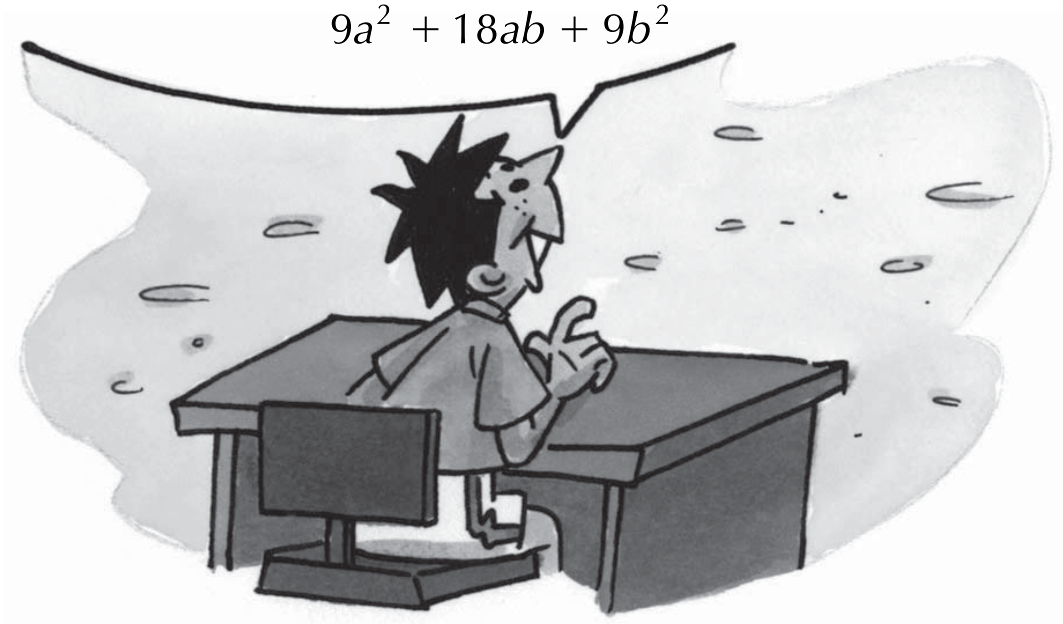
Resultando em:

$$\frac{8a^6m^3}{27b^3n^9}$$

Exemplo 2

$$\left(\frac{a-b}{3(a+b)}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{3^2 \cdot (a+b)^2} =$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{9a^2 + 18ab + 9b^2}$$



Radiciação

Para efetuar a *radiciação* de uma fração algébrica, extraímos a raiz indicada do numerador e do denominador da fração.

Exemplo 1

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{\sqrt{(a+b)^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a+b}{2}$$

Exemplo 2

$$\sqrt[3]{\frac{a+b}{8}} = \frac{\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{a+b}}{2}$$

Exercício

3. Efetue as operações seguintes:

a) $\frac{2a}{5b} + \frac{3a}{5b} + \frac{4ab}{5b}$

b) $\frac{3c}{2ab} - \frac{5d}{2ab}$

c) $\frac{a+1}{a-1} - \frac{5a}{a^2-1} + \frac{a-1}{a+1}$

d) $\frac{5a^2b}{3c} \cdot \frac{8c^2d}{4ab^3}$

e) $\frac{3a^2b}{5cd^2} : \frac{5ab^2}{3c^2}$

f) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-6x+5} \cdot \frac{x^2-7x+10}{x^2+x-6}$

g) $\frac{4mn^2}{3p^2q^3} : \frac{4p^3q}{9m^3n}$

h) $\frac{5a^2b^3}{9m^2n} \cdot \frac{6c^2}{25a^4b} \cdot \frac{m^3p}{4n^2}$

i) $\left(\frac{2a^3b}{3mn^3}\right)^2$

j) $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3$

l) $\left[\frac{(5a+3)\cdot(2a-1)}{(3b+2)\cdot 4z^2}\right]^0$

Respostas

1\. a) $\dfrac{ac}{5b}$

b) $\dfrac{4n^2}{m^2p^2}$

c) $\dfrac{6}{ab^3c^3}$

d) $5abc$

2\. a) $\dfrac{4a^3x}{4a^4}$, $\dfrac{3a^2y}{4a^4}$, $\dfrac{16z}{4a^4}$

b) $\dfrac{9ab}{15am^3}$, $\dfrac{10cm}{15am^3}$

c) $\dfrac{12a^3m}{18a^4m^3}$, $\dfrac{8a^2bm^2}{18a^4m^3}$, $\dfrac{15acm^3}{18a^4m^3}$, $\dfrac{5b^2}{18a^4m^3}$

d) $\dfrac{3a^2(m^2 - x^2)}{m(m + x)(m - x)}$, $\dfrac{8am(m - x)}{m(m + x)(m - x)}$, $\dfrac{5m(m + x)}{m(m + x)(m - x)}$

3\. a) $\dfrac{5a + 4ab}{5b}$

b) $\dfrac{3c - 5d}{2ab}$

c) $\dfrac{2a^2 - 5a + 2}{(a + 1)(a - 1)}$

d) $\dfrac{10acd}{3b^2}$

e) $\dfrac{9ac}{25bd^2}$

f) 1

g) $\dfrac{3m^4n^3}{p^5q^4}$

h) $\dfrac{b^2c^2mp}{30a^2n^3}$

i) $\dfrac{4a^6b^2}{9m^2n^6}$

j) $\dfrac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1}{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}$

l) 1





Capítulo 13

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

Problemas do quotidiano

João trabalha no centro de uma grande metrópole, mas mora em uma cidade do interior.

Para ir ao trabalho todos os dias ele toma duas conduções: um trem e um ônibus e caminha mais 3 km a pé.



Sabendo-se que a distância entre sua casa e o trabalho é de 36 km e que a distância que ele percorre de trem é duas

vezes maior que a distância que ele percorre de ônibus, quanto ele percorre em cada uma dessas conduções?

distância de ônibus: x

distância de trem: $2x$

distância a pé: 3 km

Total 36 km

Assim: $x + 2x + 3 = 36$ ou $x = 11$

Dessa maneira ele percorre 11 km de ônibus e 22 km de trem.

Como pudemos verificar em nosso exemplo, uma equação que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, onde a e b são números racionais e $a \neq 0$, e sendo que x assume valores racionais é chamada de *equação de 1º grau* a uma incógnita.

Equações do 1º grau

Para resolvermos qualquer tipo de equação do 1º grau é necessário que conheçamos as *propriedades fundamentais da igualdade.* São elas:

1ª) *Princípio aditivo da igualdade*

Se adicionarmos ou subtrairmos um mesmo número dos dois lados de uma igualdade, obteremos uma nova igualdade.

Exemplo

Adicionando a ambos os membros (−3), obtemos:

$$a + 3 + (-3) = 5 + (-3)$$

Reduzindo aos termos semelhantes:

$$a + 3 - 3 = 5 - 3$$

$$a + 0 = 2$$

$$a = 2$$



2ª) *Princípio multiplicativo da igualdade*

Se multiplicarmos ou dividirmos por um mesmo número, diferente de zero, os dois lados de uma igualdade, obteremos uma nova igualdade.

Exemplo

$$-\frac{x}{3} = 12$$

Multiplicando ambos os menbros por −3, obteremos:

$$-\frac{x}{3} \cdot -3 = 12 \cdot -3$$
$$x = -36$$

3ª) *Sejam dois números racionais* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{b}$ *e se* $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$ *então* $a = c$.

Exemplo 1

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{3}{4}$$

Igualando os denominadores, temos:

$$x - 2 = 3$$

Adicionando a ambos os membros 2, obteremos:

$$x - 2 + 2 = 3 + 2$$
$$x = 5$$

Exemplo 2

$$-\frac{1}{3} + \frac{x}{4} = \frac{2x}{3} - \frac{7}{12}$$

mmc(3, 4, 12) = 12

Assim:

$$\frac{-4 + 3x}{12} = \frac{8x - 7}{12}$$

Como os denominadores são iguais:

$$-4 + 3x = 8x - 7$$

Utilizando o princípio aditivo da igualdade:

$$3x - 8x = -7 + 4$$

$$-5x = -3$$

e agora, o princípio multiplicativo da igualdade, multiplicando ambos os membros por $-\frac{1}{5}$, obtemos:

$$-5x \cdot -\frac{1}{5} = -3 \cdot -\frac{1}{5}$$

$$x = \frac{3}{5}$$



Exercício

1. Resolva as seguintes equações do primeiro grau utilizando as propriedades fundamentais das igualdades:

a) $x = 7$

b) $5x = 4$

c) $x + 1 = 8$

d) $x - 5 = 7$

e) $2m - 4 = 7$

f) $\frac{p}{2} - 5 = 4$

g) $3x + 5 = 2x - 1$

h) $y + 2(y - 2) = y - 1$

RESOLVENDO PROBLEMAS COM UMA VARIÁVEL

Vejamos como resolver alguns problemas que envolvem equações do 1º grau.

Exemplo 1

Se do dobro de um número subtrairmos 3, obteremos 7. Qual é esse número?

Seja "x" o número procurado, então "$2x$" representará o dobro dele.



Logo:

$2x - 3 = 7$

$2x - 3 + (+3) = 7 + (+3)$

$2x = 10$

$$2x \cdot \left(\frac{+1}{2}\right) = 10 \cdot \left(\frac{+1}{2}\right) \rightarrow x = 5$$

Exemplo 2

A soma de nossas idades atualmente é 45. Calcule-as, sabendo que sou mais velho do que você 7 anos.

Seja: $x \rightarrow$ minha idade atual e

$x - 7 \rightarrow$ sua idade atual

Logo: $x + (x - 7) = 45 \rightarrow 2x - 7 + (+7) = 45 + (+7)$

$$2x = 52$$

$$2x\left(\frac{+1}{2}\right) = 52 \cdot \left(\frac{+1}{2}\right)$$

$$x = 26 \text{ anos}$$

Então sua idade será: $x - 7 = 26 - 7 = 19$ anos

Exercícios

2. Carlos comprou três televisores por R$ 2.700,00. Quanto custou cada um?

3. Se da metade de um número subtrairmos 7, obteremos 2. Qual é o número?

4. Se ao triplo do número de canetas que eu possuo atualmente somarmos 2, obteremos 23. Quantas canetas eu tenho?

5. Se ao dobro do número pensado por mim somarmos 3, obteremos 13. Qual foi o número pensado?

6. Se da metade da sua idade tirarmos a terça parte dela, obteremos 6. Qual é a sua idade?

7. Pensei em um número e adicionei 6. O resultado assim obtido multipliquei por 3, obtendo 60. Qual foi o número pensado?

8. Se da terça parte de um número tirarmos 1, obteremos 5. Qual é esse número?

9. Se à quinta parte do número de bonés que eu possuo adicionássemos 2, obteríamos 6. Quantos bonés eu possuo?

10. A quarta parte do número de blusas que eu possuo é 3. Quantas blusas eu tenho?

11. Se do dobro do número de gravatas que possuo tirarmos 3, obteremos 11. Quantas gravatas possuo?

12. **Enigma**

Sobre o túmulo de Diofanto havia sua história, e quem conseguisse decifrá-la descobriria sua idade. Vamos tentar desvendar esse mistério?

1º) Deus concedeu-lhe passar a sexta parte de sua vida na juventude;

2º) um duodécimo na adolescência;

3º) um sétimo no casamento, sem ter filhos;

4º) depois de cinco anos, nasceu seu primeiro filho;

5º) esse filho, ao atingir a metade da idade de seu pai, morreu;

6º) após quatro anos da morte de seu filho, morreu Diofanto.

Quantos anos viveu Diofanto?

Dica: se considerarmos x o número de anos que viveu Diofanto, teremos esse enigma na forma de uma equação do 1º grau, ou seja:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

13. Um terço do que ganho é reservado ao pagamento do aluguel e dois quintos são gastos em alimentação. Se do que sobra, coloco metade na poupança, ficando com R$ 150,00 para gastos gerais, qual é o meu salário?

Equações racionais fracionárias redutíveis ao primeiro grau na variável

Uma equação diz-se *racional fracionária* quando contiver variável no denominador da equação.

Assim $\frac{x-1}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{x}{x-3}$ é uma equação *racional fracionár*ia.

Neste caso, define-se como *domínio de validade* para uma equação *racional fracionária* o conjunto de valores que não anulem o denominador da equação.

Exemplo

Resolva a equação:

$$\frac{x-1}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{x}{x-3}$$

Solução

a) Determinação do domínio de validade:

$x \neq 0$ e

$x - 3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$

b) Determinação da raiz da equação:

$\text{mmc}[x, (x - 3)] = x \cdot (x - 3)$

$$\frac{(x-1)(x-3) - 2 \cdot x}{x \cdot (x-3)} = \frac{x^2}{x \cdot (x-3)}$$

$x^2 - 4x + 3 - 2x = x^2 \rightarrow -6x = -3$

$6x = 3 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

Como $\frac{1}{2}$ é diferente de 0 e de 3, então $\frac{1}{2}$ é raiz da equação ou $x = \frac{1}{2}$.

Exercício

14. Resolva as equações racionais fracionárias seguintes, e em cada caso determine:
 I) o domínio de validade
 II) a raiz da equação

a) $\frac{x}{x+1} + \frac{3}{x-1} = 1$

b) $\frac{x}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$

c) $\frac{3-x}{x-2} = 4$

d) $\frac{2x-3}{5x+4} = \frac{2}{5}$

e) $\frac{3x-2}{3x+5} = \frac{2x+1}{2x-3}$

INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU



Para preparar um amaciante de roupas, dona Dirce lê na embalagem que deve acrescentar ao seu conteúdo 4 litros de água. Ela obteve com essa mistura um volume maior que o sêxtuplo do volume inicial da embalagem. Como podemos representar essa situação com uma desigualdade?

Se considerarmos como *x* o volume da embalagem, teremos:

$$x + 4 > 6x$$

que é uma inequação do primeiro grau com uma incógnita.

Resolução de inequações do primeiro grau a uma variável no conjunto "Q"

Para que possamos resolver a inequação do exemplo anterior e todos os tipos de inequações, é necessário que conheçamos algumas propriedades.

1º) *Propriedades fundamentais da desigualdade*

Se adicionarmos aos dois membros de uma desigualdade uma mesma quantidade "m" ($m > 0$ ou $m < 0$), a desigualdade não muda de sentido.

2º) *Princípio mutiplicativo da desigualdade*

Se multiplicarmos ambos os membros de uma desigualdade por uma mesma quantidade m ($m > 0$), a mesma não muda de sentido; mas se multiplicarmos ambos os membros por uma quantidade m ($m < 0$), a mesma mudará de sentido.

Exemplos

Resolva as seguintes inequações:

I. $5a - 18 > 0$

Adicionando +18 a ambos os membros, obtemos:

$5a - 18 + (+18) > 0 + (+18) \rightarrow 5a > 18$

Multiplicando por $\frac{+1}{5}$ ambos os membros, obtemos:

$$5a \cdot \left(\frac{+1}{5}\right) > 18 \cdot \left(\frac{+1}{5}\right) \rightarrow a > \frac{18}{5}$$

Logo: $S = \left\{a \in \mathbb{Q} \mid a > \frac{18}{5}\right\}$

II. $5a + 18 \geqslant 0$

Adicionando −18 a ambos os membros, obtemos:

$5a + 18 + (-18) \geqslant 0 + (-18) \rightarrow 5a \geqslant -18$

Multiplicando por $\frac{+1}{5}$ ambos os membros, obtemos:

$$5a \cdot \left(\frac{+1}{5}\right) \geqslant -18 \cdot \left(\frac{+1}{5}\right) \rightarrow a \geqslant -\frac{18}{5}$$

Logo: $S = \left\{a \in \mathbb{Q} \mid a \geqslant -\frac{18}{5}\right\}$

III. $-3a - 7 < 0$

Adicionando $+7$ a ambos os membros, obtemos:

$-3a - 7 + (+7) < 0 + (+7) \rightarrow 23a < 7$

Multiplicando por $-\frac{1}{3}$ ambos os membros, obtemos:

$$-3a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) > 7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \rightarrow a > -\frac{7}{3}$$

Logo: $S = \left\{a \in \mathbb{Q} \mid a > -\frac{7}{3}\right\}$

Observação: Quando multiplicamos ambos os membros da desigualdade por um número negativo, é invertido o sentido da desigualdade.

IV. $-5a + 2 < 0$

Adicionando (-2), a ambos os membros, obtemos:

$-5a + 2 + (-2) < 0 + (-2) \rightarrow -5a < -2$

Multiplicando por $\left(-\frac{1}{5}\right)$ ambos os membros:

$$-5a \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) > -2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \rightarrow a > \frac{2}{5}$$

Logo: $S = \left\{a \in \mathbb{Q} \mid a > \frac{2}{5}\right\}$



Exercícios

15. Resolva as seguintes inequações do 1º grau.

a) $5x - 7 > 8x + 3$

b) $x + 1 > 0$

c) $3(2x + 1) - 3x < 5x - 1$

d) $3(x - 2) + 2(x + 3) \geqslant 2x - 3(2x - 7)$

e) $\dfrac{2y}{3} - \dfrac{3(y - 1)}{6} < \dfrac{1}{2}$

f) $\dfrac{2x - 1}{3} - \dfrac{1}{6} \geqslant \dfrac{x}{4}$

16. Dona Maria possui uma quantidade x de galinhas em seu quintal. Se ela acrescentar 5 galinhas à sua criação ela ficará ainda com menos de 40 galinhas. Qual o número máximo de galinhas que ela possui atualmente?

17. Para preparar um suco de guaraná Jandira utilizou uma quantidade *n* de concentrado de guaraná e adicionou 2 litros de água. Ela obteve 8 vezes mais de suco do que a quantidade utilizada de concentrado. Quanto ela utilizou no máximo de concentrado?

SISTEMAS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS DO PRIMEIRO GRAU

Izamar e Mariza têm juntas 31 figurinhas. Sabendo-se que Izamar possui mais figurinhas que sua irmã Mariza, pede-se: calcular o número de figurinhas de cada uma, se a diferença entre o número delas é 5.

Seja $x \rightarrow$ o número de figurinhas de Izamar

e $y \rightarrow$ o número de figurinhas de Mariza

Vamos então formar as sentenças correspondentes ao problema em questão:

I. Elas têm juntas 31 figurinhas: $x + y = 31$.

II. A diferença entre o número de figurinhas de cada uma é 5.

$$x - y = 5, \text{ pois } (x > y)$$

Logo, temos: $x + y = 31$ e $x - y = 5$ que pode ser representado como:

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Para determinarmos o número de figurinhas de cada uma, devemos resolver o sistema proposto.

Seja o sistema anterior:

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Vamos isolar uma das variáveis de uma das equações e substituir na outra. Assim temos:

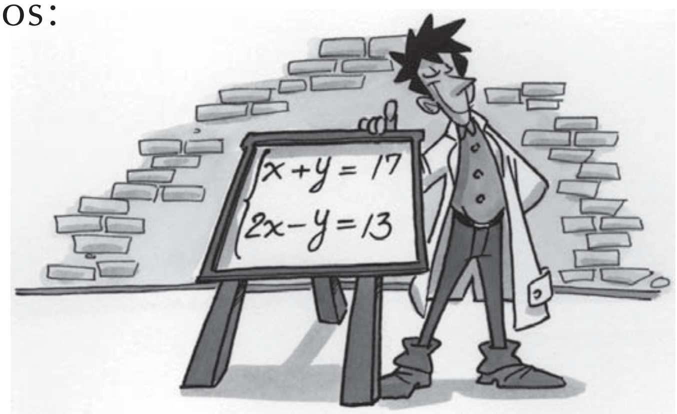
$$x = 31 - y$$

e agora substituindo,

$$31 - y - y = 5$$

Resolvendo a equação temos:

$$-2y = 5 - 31$$
$$-2y = -26$$
$$y = 13$$



Como $x = 31 - y$, temos:

$$x = 31 - 13 \rightarrow x = 18$$

Para verificar se o resultado encontrado está correto, substituímos os valores no sistema inicial:

$$\begin{cases} x + y = 31 \rightarrow 18 + 13 = 31 \\ x - y = 5 \rightarrow 18 - 13 = 31 \end{cases}$$

Portanto, Izamar possui 18 figurinhas e Mariza possui 13.

Exercícios

18. Resolva os seguintes sistemas de equação simultâneas do primeiro grau nas variáveis.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 47 \\ x + y = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = -18 \\ x - y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3m + 4n = -9 \\ m + 2n = -\dfrac{13}{6} \end{cases}$

d) $\begin{cases} p - q = -\dfrac{1}{15} \\ 3p + 5q = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3r + s = 3 \\ r + 2s = \dfrac{8}{3} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2a + 3b = 8 \\ a = b - 1 \end{cases}$

19. Se ao dobro do número de revistinhas de Sandra adicionarmos o triplo do número de revistinhas de Patrícia, obteremos 27. Sabendo-se que Gláucia tem uma revistinha a mais do que Patrícia, pede-se: quantas revistinhas possui cada uma?

20. Cida e Tula possuem juntas R$ 45.800,00. Quanto possui cada uma, sabendo-se que o dobro do que possui Cida, adicionando com a metade do que possui Tula, é R$ 50.350,00?

21. Se ao dobro da idade de Yolanda, adicionarmos a minha idade, obteremos 64 anos. Sabe-se que Yolanda é 7 anos mais nova do que eu. Quais são nossas idades?

22. A soma de dois números é 20. A diferença entre eles é 6. Quais são os números?

23. Se ao quádruplo de um número inteiro somarmos o triplo de seu sucessivo, obteremos 31. Quais são os números?

24. Se a um número inteiro somarmos o triplo de seu sucessivo, obteremos 35. Quais são esses números?

25. A diferença entre dois números é 7. Sabendo-se que se ao triplo do maior adicionarmos o menor obteremos 29, quais são os números?

26. Juntos, eu e Heloísa, possuímos 63 livros em nossa biblioteca. Quantos livros nós te-

mos, sabendo-se que possuo 9 livros a mais do que Heloísa?

27. Se adicionarmos ao triplo do que Durvalino possui mais o quanto eu possuo, teremos R$ 20.000,00. Quanto possui cada um de nós, sabendo-se que nossas quantias são iguais?

28. Mário e Izaura possuem juntos 16 discos. Quantos discos possui cada um se Mário possui 2 discos a mais do que Izaura?

Respostas

1. a) $x = 7$
   b) $x = \frac{4}{5}$
   c) $x = 7$
   d) $x = 12$
   e) $m = \frac{11}{2}$
   f) $p = 18$
   g) $x = -6$
   h) $y = \frac{3}{2}$
2. R$ 900,00
3. 18
4. 7 canetas
5. 5
6. 36 anos
7. 14
8. 18
9. 20 bonés
10. 12 blusas
11. 7 gravatas
12. 84 anos
13. R$ 1.125,00
14. a) I. $x \neq -1$ e $x \neq 1$
    II. $x = -2$
    b) I. $x \neq -3$ e $x \neq 3$
    II. $S = \varnothing$
    c) I. $x \neq 2$
    II. $x = \frac{11}{5}$
    d) I. $x \neq -\frac{4}{5}$
    II. $s = \varnothing$
    e) I. $x \neq -\frac{5}{3}$ e $x \neq \frac{3}{2}$
    II. $x = \frac{1}{26}$
15. a) $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -\frac{10}{3}\}$
    b) $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -1\}$
    c) $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 2\}$
    d) $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant \frac{21}{9}\}$
    e) $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$
    f) $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant \frac{6}{5}\}$

16. 34

17. $\frac{2}{7}\ \ell$ ou, aproximadamente, $0{,}28\ \ell$

18. a) $x = 13$ e $y = 7$

b) $x = -5$ e $y = -8$

c) $m = -\frac{14}{3}$ e $n = \frac{5}{4}$

d) $p = \frac{1}{3}$ e $q = \frac{2}{5}$

e) $r = \frac{2}{3}$ e $s = 1$

f) $a = 1$ e $b = 2$

19. Gláucia → 6 revistinhas
Patrícia → 5 revistinhas

20. Tula → R$ 27.500,00
Cida → R$ 18.300,00

21. Minha → 26 anos
Yolanda → 19 anos

22. 7 e 13

23. 4 e 5

24. 8 e 9

25. 2 e 9

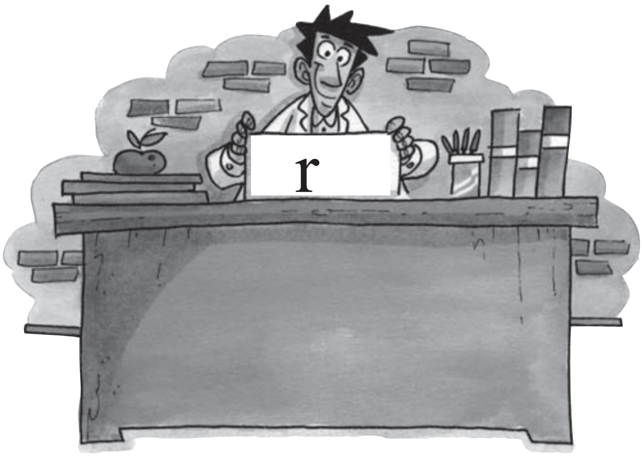
26. Eu → 36 livros
Heloísa → 27 livros

27. Possuimos R$ 5.000,00 cada um.

28. Mário → 9 discos
Izaura → 7 discos



Capítulo 14

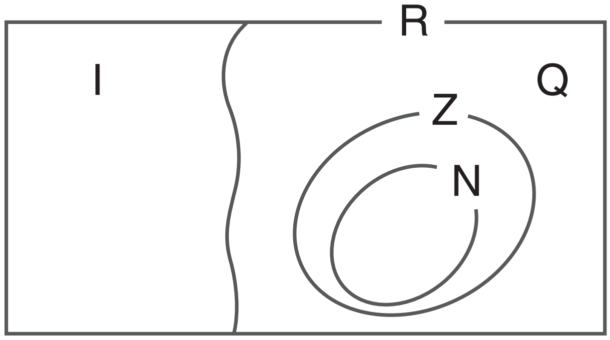


O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Os números reais

O conjunto dos números reais é formado por todos os números, racionais e irracionais, ou seja, r = q U I

Vejamos isso por meio do diagrama ao lado:



Relação entre os conjuntos numéricos

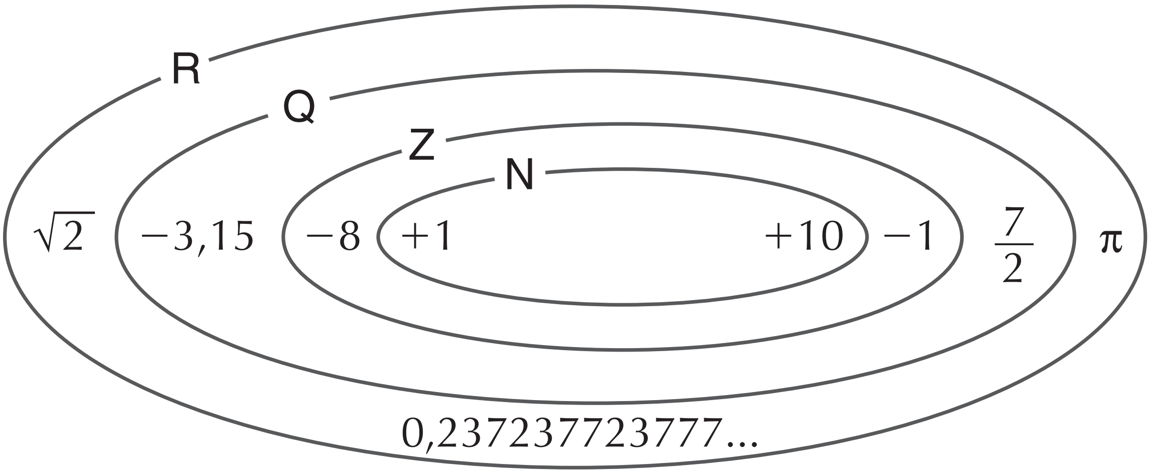
Resumindo o que foi visto anteriormente, temos:

n = conjunto dos números naturais
z = conjunto dos números inteiros
q = conjunto dos números racionais
r = conjunto dos números reais

Podemos estabelecer as seguintes relações entre esses conjuntos:

$$n \subset z \subset q \subset r$$

Para ilustrar essas relações observe o diagrama a seguir:



Analisando o diagrama temos:

- $1 \in n$, $1 \in z$, $1 \in q$ e $1 \in r$
- $-8 \notin n$, $-8 \in z$, $-8 \in q$ e $-8 \in r$
- $-3{,}15 \notin n$, $-3{,}15 \notin z$, $-3{,}15 \in q$ e $-3{,}15 \in r$
- $\pi \notin n$, $\pi \notin z$, $\pi \notin q$ e $\pi \in r$

Potenciação em r

Seja $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} (a \neq 0,\ n \in N)$

Valem as seguintes propriedades:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Exemplos

I. $a^{-5} \cdot a^{-4} = a^{-5-4} = a^{-9} = \dfrac{1}{a^9}$

II. $(a^2)^{-5} = a^{-10} = \dfrac{1}{a^{10}}$

Radiciação em r

Seja $\sqrt[n]{N}$, valem as seguintes propriedades:

1. Se n é par $\rightarrow \exists \sqrt[n]{N}$ se e somente se $N > 0$

2. Se n é ímpar $\begin{cases} \exists \sqrt[n]{N} > 0 \text{ se } N > 0 \\ \exists \sqrt[n]{N} < 0 \text{ se } N < 0 \end{cases}$

Exemplo

$\sqrt{+16} = 4 \qquad \nexists \sqrt{-16} \in \mathbb{R} \qquad \sqrt[3]{+8} = +2 \qquad \sqrt[3]{-8} = -2$

Vejamos a seguir exemplos de como resolver equações.

Exemplo 1

Seja: $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ x'' = +2 \end{cases}$

Logo: $x^2 = 4 \rightarrow S = \{-2, +2\}$

Conclusão: Quando o índice for par, a equação proposta admitirá duas raízes reais e opostas (ou simétricas), com o radicando positivo.

Exemplo 2

Seja: $x^3 = +8 \rightarrow x = \sqrt[3]{+8} \rightarrow x = 2 \rightarrow S = \{+2\}$

se: $x^3 = -8 \rightarrow x = \sqrt[3]{-8} \rightarrow x = -2 \rightarrow S = \{-2\}$

Conclusão: Quando o expoente da variável for ímpar, a equação proposta admitirá uma única raiz real e de mesmo sinal do radicando.

Exercícios

1. Calcule em r as raízes a seguir:

a) $\sqrt{9}$

b) $\sqrt[3]{27}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt{-8}$

e) $\sqrt[3]{-8}$

f) $\sqrt[5]{+1}$

g) $\sqrt[6]{64}$

h) $\sqrt[6]{-64}$

i) $\sqrt[8]{-1}$

j) $\sqrt[8]{+1}$

2. Resolva as equações abaixo e quando possível determine a solução:

a) $x = 2$

b) $x^2 = 2$

c) $x^3 = 2$

d) $x^4 = 256$

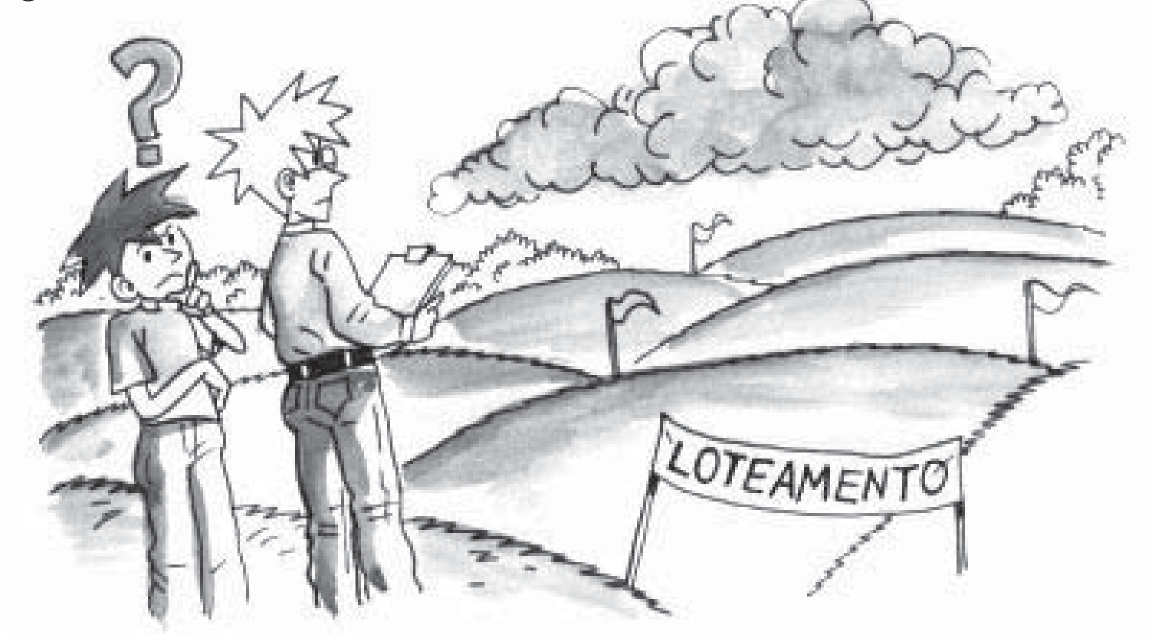
e) $x^3 = -2$

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU COM UMA ÚNICA VARIÁVEL

Uma empresa que vende loteamentos montou um condomínio de chácaras, cada uma com 1.500 m^2. As dimensões de cada chácara são para cada x metros de frente x + 20 metros de fundo.

Como expressar matematicamente essa situação?

Basta multiplicar as dimensões do terreno e igualar à metragem total.



Na prática:

$$x\,(x + 20) = 1.500$$
$$x^2 + 20x - 1.500 = 0$$

que é uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com a, b e $c \in$ r e $a \neq 0$.

As equações de segundo grau podem ser:

- incompletas
- completas

Veremos a seguir como resolvê-las.

Resolução de equações incompletas do segundo grau

Primeiro tipo: $ax^2 = 0$ [($a \neq 0$; $b = 0$; $c = 0$), $a \in$ R]

Para resolver esse tipo de equação, dividem-se ambos os membros por "*a*", obtendo-se:

$$ax^2 : a = 0 : a$$

$$x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{0} \begin{cases} x' = +\sqrt{0} = 0 \\ x'' = -\sqrt{0} = 0 \end{cases}$$

Logo:

$$ax^2 = 0 \rightarrow S = \{0, 0\} \rightarrow S = \{0\}$$

Exemplo

Resolva: $-13x^2 = -52$

Dividem-se ambos os membros por (-13):

$$\frac{-13x^2}{-13} = \frac{-52}{-13}$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow \begin{cases} x' = +\sqrt{4} = 2 \\ x'' = -\sqrt{4} = -2 \end{cases}$$

Logo:

$$-13x^2 = -52 \rightarrow S = \{-2, 2\}$$

Segundo tipo:

$$ax^2 + bx = 0 \; [(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0),\ (a,\ b) \in R]$$

Para resolvermos esse tipo de equação, fatoramos a mesma em x, obtendo

$$x(ax + b) = 0$$

Se o produto de duas quantidades é igual a zero, é porque uma delas é zero.

Logo:

$$x' = 0 \text{ ou } ax + b = 0$$
$$ax = -b$$
$$x'' = -\frac{b}{a}$$

Logo:

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow S = \left\{0,\ -\frac{b}{a}\right\}$$

Exemplo

Resolva $4x^2 - 8x = 0$

Fatorando por evidência $(4x)$, obtemos:

$$4x(x - 2) = 0$$

Então:

$$4x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0$$

ou:

$$(4x) : 4 = 0 : 4 \quad \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = +2 \end{cases}$$

Logo:

$$4x^2 - 8x = 0 \rightarrow S = \{0,\ +2\}$$

Terceiro tipo:

$ax^2 + c = 0$ [($a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$), $(a, c) \in R$]

ou:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Para que essa equação admita solução é necessário que o radicando $-\frac{c}{a}$ seja positivo, ou "*a*" e "*c*" deverão ter sinais opostos, caso contrário nos levará a $S = \varnothing$, devido ao índice da raiz ser par.

Se: $-\frac{c}{a} > 0 \rightarrow ax^2 + c = 0 \rightarrow S = \left\{+\sqrt{-\frac{c}{a}}, -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$

Exemplo

Resolva $3x^2 - 7 = 0$

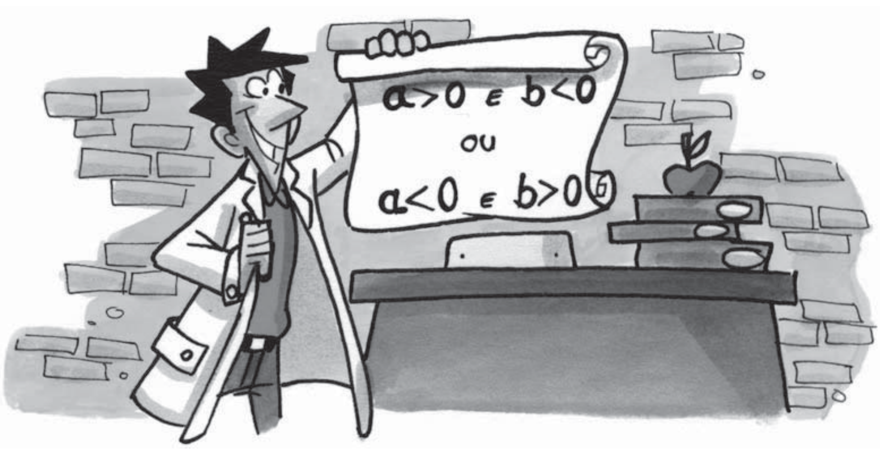
Transpondo "7" para o segundo membro, obtemos:

$$3x^2 = 7$$

$$x^2 = \frac{7}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\text{Se: } \frac{7}{3} > 0 \rightarrow 3x^2 - 7 = 0$$

$$S = \left\{\sqrt{\frac{7}{3}}, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right\}$$



Exercício

3. Resolva em r as seguintes equações incompletas do segundo grau na variável:

a) $2x^2 = 0$

b) $2t^2 - 1 = 0$

c) $3x^2 - 7x = 0$

d) $\sqrt{3}\, t^2 = 0$

e) $2t^2 - 8 = 0$

f) $\frac{-7}{3} y^2 = 0$

g) $3t^2 + 9 = 0$

h) $\frac{2}{3} t^2 - \frac{1}{2} t = 0$

i) $-4z^2 = 0$

Resoluções de equações completas do segundo grau

Dada: $ax^2 + bx + c = 0$ [$(a, b, c) \in$ r; $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$] devemos transformá-la numa equivalente, de tal modo que o primeiro membro seja um quadrado perfeito. Para tanto transpomos para o segundo membro "c":

$$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicamos ambos os membros por "$4a$":

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

a seguir, somamos a ambos os membros b^2:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

em que: $\begin{cases} 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2 \\ b^2 - 4ac = \Delta \ (\Delta \rightarrow \text{discriminante}) \end{cases}$

Então:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = 2b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Essa é a chamada *fómula de Bhashara* (um matemático hindu do século XII), que representa a generalização da resolução de equações de 2º grau com uma incógnita.

Concluímos então que a solução de $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por:

$$S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

Exemplo

Resolva $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\begin{cases} a = +2 \\ b = -3 \\ c = +1 \end{cases}$$

Então: $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\,(+2)\,(+1) = 9 - 8 = 1$

Logo:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (+2)} = \frac{+3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (+2)} = \frac{+3 \pm 1}{4}$$

$$x' = \frac{3 - 1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x'' = \frac{3 + 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

Exercício

4. Resolva em r as seguintes equações completas do segundo grau:
   a) $x^2 - 2x + 1 = 0$
   b) $x^2 + 7x - 18$
   c) $y^2 - 6x + 5 = 0$
   d) $3z^2 + z + 4 = 0$
   e) $t^2 - 9t = 10$

Discussão da existência das raízes de uma equação do segundo grau

A resolução de uma equação do segundo grau dependerá do valor de Δ, exclusivamente. Então, dada a forma genérica da equação do segundo grau:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ [(\forall a, b, c) \in R;\ a \neq 0],$$

devemos considerar três casos:

Primeiro caso: $\Delta > 0$

Neste caso, a equação proposta admitirá duas raízes reais e distintas:

$$\left.\begin{matrix} \Delta > 0 \\ x' \neq x'' \end{matrix}\right\} \rightarrow S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

Segundo caso: $\Delta = 0$

Neste caso, a equação proposta admitirá duas raízes reais e idênticas:

$$\left.\begin{matrix} \Delta = 0 \\ x' = x'' \end{matrix}\right\} \rightarrow S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

Terceiro caso: $\Delta < 0$

Neste caso, $U = R$, a equação proposta não admitirá raízes no campo r:

$$\left.\begin{matrix} \Delta < 0 \\ \nexists\ x', x'' \end{matrix}\right\} \rightarrow S = \{\ \} \text{ ou } \varnothing$$

Diz-se que as raízes são imaginárias.

Exemplo 1

Discuta em r a existência ou não das raízes das seguintes equações do segundo grau.

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

Solução

$$\begin{cases} a = +1 \\ b = -7 \\ c = +10 \end{cases}$$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot (+1) \cdot (+10) = 49 - 40 = 9 \rightarrow \Delta > 0$
Se $\Delta > 0$, então a equação proposta admitirá duas raízes reais e distintas.



$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (+1)} = \frac{7 \pm 3}{2} \quad \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = 5 \end{cases}$$

$S = \{2, 5\}$

b) $t^2 - 4t + 4 = 0$

Solução

$$\begin{cases} a = +1 \\ b = -4 \\ c = +4 \end{cases}$$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (+1) \cdot (+4) = 16 - 16 = 0 \rightarrow \Delta = 0$
Se $\Delta = 0$, então a equação proposta admitirá duas raízes reais e idênticas.

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (+1)} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow S = \{2)$$

c) $3y^2 - y + 1 = 0$

Solução

$$\begin{cases} a = +3 \\ b = -1 \\ c = +1 \end{cases}$$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (+3) \cdot (+1) = +1 - 12 = -11 \rightarrow \Delta < 0$

Se $\Delta < 0$, então a equação proposta não admitirá raízes reais.

Logo: $S = \{\ \} = \varnothing$

Exemplo 2

Para que valores de k a equação: $3x^2 - 2x - k = 0$

admite:
- a) raízes reais e distintas
- b) raízes reais e idênticas
- c) raízes imaginárias ($\notin \mathbb{R}$)

Solução

Estudo do $\Delta \rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (+3) \cdot (-k)$

Logo: $\Delta = 4 + 12k$

a) Para que admita raízes reais e distintas $\rightarrow \Delta > 0$

$$\Delta = 4 + 12k > 0 \rightarrow 12k > -4 \rightarrow k > -\frac{1}{3}$$

b) Para que admita raízes reais e idênticas $\rightarrow \Delta = 0$

$$\Delta = 4 + 12k = 0 \rightarrow 12k = -4 \rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

c) Para que admita raízes imaginárias $\rightarrow \Delta < 0$

$$\Delta = 4 + 12k < 0 \rightarrow 12k < -4 \rightarrow k < -\frac{1}{3}$$

Exercícios

5. Discuta em r a existência de raízes:

a) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

b) $y^2 - 3y + 9 = 0$

c) $7z^2 - z - 9 = 0$

d) $t^2 - 6t + 9 = 0$

e) $v^2 - 6v + 18 = 0$

f) $3u^2 - 6u + 3 = 0$

6. Para que valores de k, a equação:

a) $3x^2 - 7x - 2k + 3 = 0$ admite raízes reais e distintas?

b) $kx^2 - 3x + 1 = 0$ admite raízes reais e idênticas?

c) $kx^2 - (4k + 2)x + 4k - 3 = 0$ admite raízes reais?

Equações redutíveis a equações de 2º grau



São assim denominadas todas as equações do 4º grau incompletas que por uma mudança de variável podem ser escritas como equações do 2º grau.

A forma genérica para esse tipo de equação é dada por:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad (\forall\ a, b, c \in r, a \neq 0)$$

São exemplos:

$$3x^4 - 5x^2 - 1 = 0$$

$$7x^4 + 3x^2 + 2 = 0$$

Para resolvermos essas equações, basta substituir x^4 por y^2 e x^2 por y.

Procedendo dessa maneira obtemos:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \rightarrow ay^2 + by + c = 0$$

Então:

$$S = \{y_1, y_2\}$$

A seguir basta conduzi-la à equação biquadrada. Para tanto faz-se:

$$x = \pm\sqrt{y_1} \rightarrow \begin{cases} x_1 = +\sqrt{y_1} \\ x_2 = -\sqrt{y_1} \end{cases}$$

$$x = \pm\sqrt{y_2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = +\sqrt{y_2} \\ x_4 = -\sqrt{y_2} \end{cases}$$

Exemplo

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

Substituindo $x^4 = y^2$ e $x^2 = y$, teremos $y^2 - 4y + 3 = 0$.

Basta então resolver essa equação como resolveríamos uma equação de segundo grau completa.

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3$$

$$\Delta = 16 - 12$$

$$\Delta = 4$$

$$y = \frac{+4 \pm 2}{2}$$

$$y' = 3$$

$$y'' = 1$$

Retornando agora a equação original temos:

$$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

$$S = \left\{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\right\}$$



Exercício

7. Resolva em r as equações biquadradas a seguir:
   a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
   b) $2t^4 - 3t^2 + 1 = 0$
   c) $5x^4 = x^2 + 4$
   d) $y^4 = 16$
   e) $3z^4 + 4z^2 - 7 = 0$
   f) $x^4 = 3x^2$

EQUAÇÕES IRRACIONAIS

São assim chamadas todas as equações, em que a variável aparece como radicando. Assim, temos, como exemplos:

$$\sqrt{x} = 5$$

$$\sqrt[3]{x - 1} = 2x + 3$$

$$\sqrt{x - 2} = x + 1$$

Resolução de uma equação irracional

Para resolver uma equação irracional, devemos transformá-la em uma equação racional (elevando-se ambos os membros a uma potência conveniente), e a seguir verificar, dentro das raízes da equação racional, quais satisfazem a equação irracional proposta.

São mostradas a seguir as resoluções de tipos de equações irracionais.

Exemplo 1

$\sqrt[3]{x} = 3$

Índice = 3 → elevando ambos os membros a terceira potência obtemos:

$$(\sqrt[3]{x})^3 = (3)^3$$

x = 27 (equação racional)

V = {27}

Verificação: Substituindo x por 27, obtemos:

$$\sqrt[3]{x} = 3 \rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$$

S = {27}

Exemplo 2

$\sqrt{9-2x}+x=5$

Isolando o radical → $\sqrt{9-2x}=5-x$

Índice = 2 → elevando ambos os membros à segunda potência, obtemos:

$(\sqrt{9-2x})^2=(5-x)^2$

$9-2x=25-10x+x^2$

$x^2-8x+16=0 \rightarrow V=\{4\}$

Verificação:

$\sqrt{9-2x}+x=5 \rightarrow \sqrt{9-2\cdot 4}+4=5$

$\sqrt{9-8}+4=5$

$\sqrt{1}+4=5$

$1+4=5$

$5=5$

$S=\{4\}$

Exemplo 3

$\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}=5$

Isolando um dos radicais:

$$\sqrt{x-4}=5-\sqrt{x+1}$$

Elevando ambos os membros à segunda potência, obtemos:

$$(\sqrt{x-4})^2=(5-\sqrt{x+1})^2$$

$$x-4=25-10\sqrt{x+1}+x+1$$

Reduzindo aos termos semelhantes:

$$30=10\sqrt{x+1}$$

ou:

$$3=\sqrt{x+1}$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os membros:

$$(3)^2 = (\sqrt{x + 1})^2$$
$$9 = x + 1$$
$$x = 8 \rightarrow V = \{8\}$$

Verificação:

$$\sqrt{8 - 4} + \sqrt{8 + 1} = 5$$
$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$$
$$2 + 3 = 5$$
$$5 = 5$$

$$S = \{8\}$$

Exemplo 4

$$\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 1} = \sqrt{x - 2}$$

Elevando ambos os membros à segunda potência, obtemos:

$$(\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 1})^2 = (\sqrt{x - 2})^2$$
$$2x + 3 - 2 \cdot \sqrt{(2x + 3) \cdot (x + 1)} + x + 1 = x - 2$$
$$-2 \cdot \sqrt{(2x + 3) \cdot (x + 1)} = -2x - 6 \ (: -2)$$
$$\sqrt{(2x + 3) \cdot (x + 1)} = x + 3$$

Elevando ambos os membros à segunda potência, novamente, obtemos:

$$(\sqrt{(2x + 3) \cdot (x + 1)})^2 = (x + 3)^2$$
$$(2x + 3) \cdot (x + 1) = x^2 + 6x + 9$$
$$2x^2 + 5x + 3 = x^2 + 6x + 9$$

ou:

$$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow V = \{-2, 3\}$$

Verificação:

Para x = − 2 → $\sqrt{2(-2)+3} - \sqrt{(-2)+1} \neq \sqrt{(-2)-2}$

$\sqrt{-4+3} - \sqrt{-2+1} \neq \sqrt{-2-2}$

$\sqrt{-1} - \sqrt{-1} \neq -4$

Conclusão: Ao efetuarmos a verificação para x = −2, nota-se que esse valor é raiz da equação racional, mas não da irracional.

Para x = 3 → $\sqrt{2\cdot(3)+3} - \sqrt{(3)+1} = \sqrt{(3)-2}$

$\sqrt{6+3} - \sqrt{4} = \sqrt{1}$

$\sqrt{9} - \sqrt{4} = \sqrt{1}$

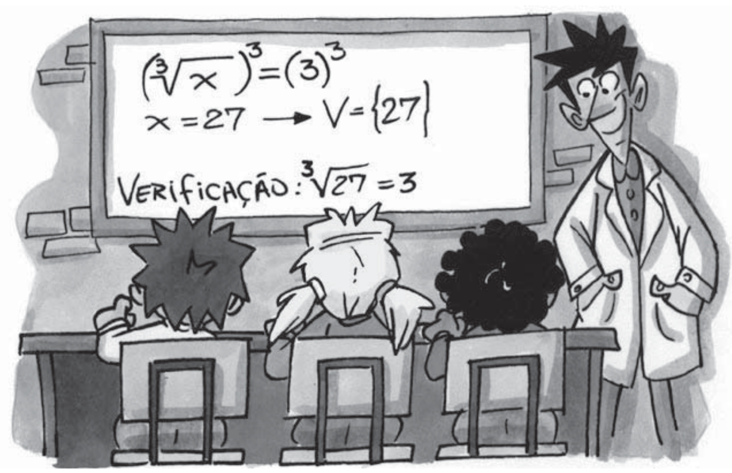
$3 - 2 = 1$

$1 = 1$

$S = \{3\}$

Observação

Ao resolver equações irracionais, você deve ter reparado que nem sempre a solução da equação racional satisfaz a equação irracional. Isso ocorre por causa da operação de elevarmos, a potências convenientes, ambos os membros, operação que em alguns casos elimina raízes que poderiam satisfazer a equação irracional. Daí, a importância da verificação.



Exercício

8. Resolva em r as equações irracionais abaixo:

a) $\sqrt[3]{x} = 2$

b) $\sqrt{x-2} + 2 = x$

c) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} = 1$

d) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-4} = \sqrt{2x-7}$

e) $\sqrt{3x^2-2} + 1 = 2x$

f) $\sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+2}$

SISTEMAS SIMPLES DO SEGUNDO GRAU

É o caso dos sistemas de duas equações (sendo uma do primeiro grau e a outra do segundo grau na mesma variável), a duas variáveis. O grau de um sistema é dado pelo produto dos graus de cada equação componente.

Verifique que muitos desses sistemas são resolvidos com a utilização de artifícios de cálculos, que são obtidos depois da prática na solução deles.

Exemplos 1

Resolva em r o sistema $\begin{cases} x + y = 7 \ (a) \\ x \cdot y = 10 \ (b) \end{cases}$

Solução

De (a) obtemos: $x + y = 7 \rightarrow x = 7 - y$ (c); substituindo em (b), obtemos: $(7 - y) \cdot y = 10$

ou:

$$y^2 - 7y + 10 = 0$$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Retomando (c) para $y = 2 \rightarrow x = 7 - y \rightarrow x = 7 - 2 \rightarrow x = 5$

$$x = 5 \text{ e } y = 2$$

para $y = 5 \rightarrow x = 7 - y \rightarrow x = 7 - 5 \rightarrow x = 2$

$$x = 2 \text{ e } y = 5$$

Portanto, $S = \{(5, 2), (2, 5)\}$

Exemplo 2

Resolva em r o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \ (a) \\ x + y^2 = 7 \ \ (b) \end{cases}$

Solução

De (a): $2x = 12 - 3y \rightarrow x = \dfrac{12 - 3y}{2}$ (c)

Substituindo (c) em (b):

$$\frac{12 - 3y}{2} + y^2 = 7 \quad \text{ou:} \quad 2y^2 - 3y - 2 = 0 \begin{cases} y_1 = -\dfrac{1}{2} \\ y^2 = +2 \end{cases}$$

Retomando (c): $x = \dfrac{12 - 3y}{2}$

$$\text{para: } y = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{12 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{12 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{27}{4}$$

$$x = \frac{27}{4} \text{ e } y = -\frac{1}{2}$$

$$\text{para: } y = +2 \rightarrow x = \frac{12 - 3 \cdot 2}{2} = \frac{12 - 6}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = +3 \text{ e } y = 12$$

Logo: $S = \left\{\left(\dfrac{27}{4}, -\dfrac{1}{2}\right), (3, 2)\right\}$

Exercício

9. Resolva em r os sistemas a seguir:
   a) $x + y = 20$ e $x \cdot y = 99$
   b) $2x + 3y = 24$ e $x \cdot y = 24$
   c) $2x + y = 16$ e $x \cdot y = 30$
   d) $x + y = 9$ e $x \cdot y = 20$
   e) $x + 2y = 20$ e $x \cdot y = 42$
   f) $x^2 + y^2 = 58$ e $x - y = 4$
   g) $x^2 + y^2 = 45$ e $x + y = 9$

RESOLVENDO PROBLEMAS A PARTIR DE SISTEMAS DE 2º GRAU

Para resolver estes problemas basta resolver um sistema simples do segundo grau e a seguir verificar se a raiz satisfaz ou não ao problema proposto.

Exemplo 1

Se do dobro do produto de dois números inteiros subtraímos o triplo de um destes, obtemos 35. Sabe-se que a soma deles é 11. Determinar quais são esses dois números?

Solução

$$2xy - 3y = 35 \text{ e } x + y = 11$$

Resolvendo o sistema assim determinado, obtemos:

$$x = 4 \quad \rightarrow \quad y = 7 \quad \rightarrow \quad (4, 7)$$

$$x = \frac{17}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{17}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

dos quais somente (4, 7) satisfaz ao problema, pois pede-se que os números determinados sejam inteiros.

$$S = \{(4, 7)\}$$

Exemplo 2

Sabendo que a diferença entre nossas idades é 7 anos e o produto entre elas atualmente é 494, determine nossas idades, considerando-me o mais velho.

Solução

Sejam: $\begin{cases} x \rightarrow \text{minha idade atualmente} \\ y \rightarrow \text{sua idade } (x > y) \end{cases}$

Logo: $x - y = 7$ (a) e $x \cdot y = 494$ (b)

De(a) temos $x - y = 7 \rightarrow x = 7 + y$ (c)

Substituindo em (b): $x \cdot y = 494 \rightarrow (7 + y) \cdot y = 494$

ou: $y^2 + 7y - 494 = 0$, cuja solução é dada por:

$$\begin{cases} y_1 = -26 \\ y_2 = +19 \end{cases}$$

A raiz -26 da equação é desprezada, pois estamos tratando de idades, sendo assim positiva.

Logo: $y = +19$, que substituída em (c): $x = 7 + 19 = 26$

Então: $\begin{cases} \text{minha idade é: 26 anos} \\ \text{sua idade é: 19 anos.} \end{cases}$



Exercícios

10. Calcule as dimensões de um retângulo cuja área é $20\ m^2$, sabendo-se que a soma das medidas da base (b) com a altura (h) é 9 m. (Considerar $b > h$.)

11. Calcule as dimensões de um paralelogramo cuja área é $10\ cm^2$, sabendo-se que a soma das medidas da base (b) com altura (h) é 7 cm.

12. Se do dobro da medida da base (b) de um paralelogramo tirarmos a medida da altura (h) dele, teremos como resultado 5 m. Sabendo-se

que a área dele é de 12 m^2, pede-se para calcular as medidas da base maior e a altura, considerando-se $b > h$.

13. A soma dos quadrados de dois números é 41. Sabe-se que a soma dos dois é 9; pergunta-se: quais são os números?

14. Sabe-se que a soma dos quadrados de dois números inteiros é positiva e é igual a 45, e que a diferença entre eles é 3. Quais são os números?

15. A metade do número de revistinhas de Sofia, adicionadas com as de Letícia, é 10. Pergunta-se: quantas revistinhas possui cada uma, sabendo-se que o produto entre números de revistinhas de cada uma é 48 e considerando-se que Sofia tenha maior número.

16. Se do dobro do número de bolinhas de Eduardo subtrairmos o triplo do número de bolinhas de Fábio, teremos como resultado 8 bolinhas. Sabe-se que o produto entre os números de bolinhas de cada um é 14; pergunta-se: quantas bolinhas possui cada um?

17. A soma entre o dobro do número de livros que possuo, com o triplo do que Walter possui, é igual a 28. Se adicionarmos ao dobro do número de meus livros o quadrado do número dos livros de Walter, obtemos 46. Quantos livros cada um de nós possui?

18. Calcule as medidas das diagonais de um losango, sabendo-se que a soma entre elas é 9 m e cuja área é 10 m^2 ($D \rightarrow$ diagonal maior; $d \rightarrow$ diagonal menor).

19. O produto entre dois números inteiros é 40 e a diferença entre eles é 3. Pergunta-se: quais são os números?

Respostas

1. a) 3 b) 3 c) -3 d) $\nexists$ e) -2 f) 1 g) 2 h) $\nexists$ i) $\nexists$ j) 1

2. a) $S = \{2\}$
   b) $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
   c) $S = \{\sqrt[3]{2}\}$
   d) $S = \{-4, +4\}$
   e) $S = \{\sqrt[3]{-2}\}$

3. a) S = {0}

b) $S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{+\sqrt{2}}{2}\right\}$

c) $S = \left\{0, \frac{7}{3}\right\}$

d) S = {0}

e) S = {−2, 2}

f) S = {0}

g) S = ∅

h) $S = \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$

i) S = {0}

4. a) S = {1}

b) S = {−9, 2}

c) S = {1, 5}

d) S = ∅

e) S = {−1, 10}

5. Raízes reais e distintas ($\Delta > 0$): a, c

Raízes reais e idênticas ($\Delta = 0$): d, f

Raízes imaginárias ($\Delta < 0$): b, e

6. a) $k > -\frac{13}{34}$

c) $k \geqslant -\frac{1}{7}$

b) $k = \frac{9}{4}$

7. a) $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$

b) $S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

c) S = {−1, 1}

d) S = {−2, 2}

e) S = {−1, 1}

f) $S = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$

8. a) S = {8}

b) S = {2, 3}

c) S = ∅

d) S = {4}

e) S = {1, 3}

f) S = {1}

9. a) S = {(11, 9), (9, 11)}

b) S = {(6, 4)}

c) S = {(5, 6), (3, 10)}

d) S = {(4, 5), (5, 4)}

e) S = {(14, 3), (6, 7)}

f) S = {(7, 3), (−3, −7)}

g) S = {(3, 6); (6, 3)}

10. b = 5 m, h = 4 m

11. b = 5 cm, h = 2 cm
ou:
b = 2 cm, h = 5 cm

12. b = 4 m, h = 3 m

13. 4 e 5

14. 3 e 6

15. Sofia → 12 revistinhas
Letícia → 4 revistinhas

16. Eduardo → 7 bolinhas
Fábio → 2 bolinhas

17. Eu → 5 livros
Walter → 6 livros

18. D = 5 m
d = 4 m

19. 5 e 8



Capítulo 15



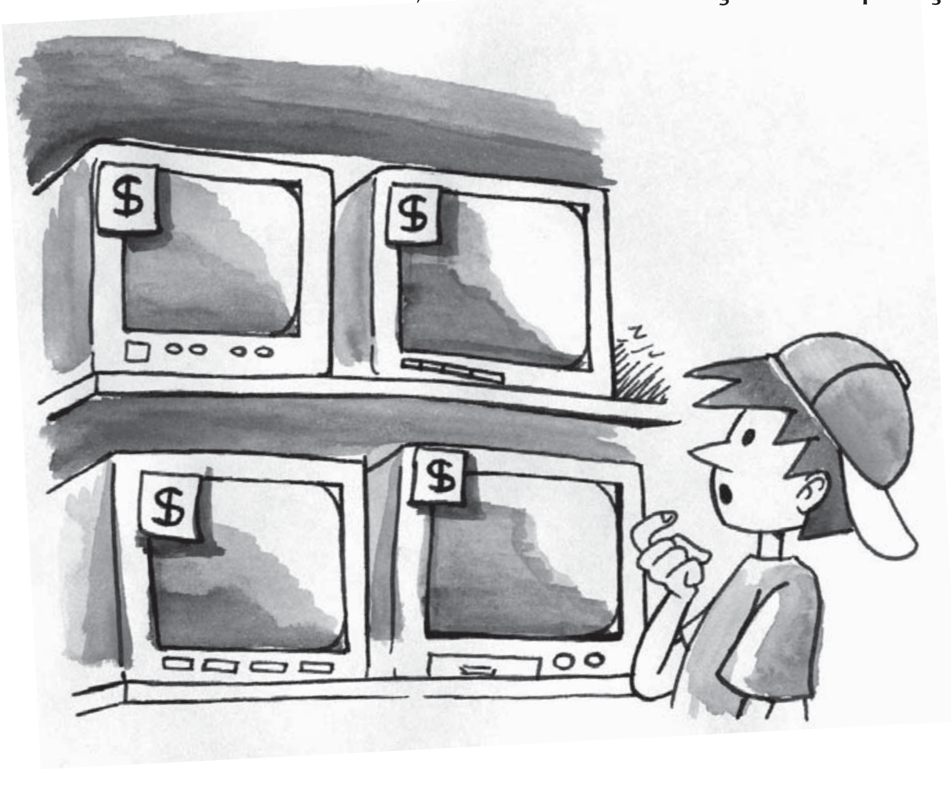


FUNÇÕES: QUAL SEU SIGNIFICADO E APLICAÇÕES

Toda compra que fazemos no comércio *depende* de vários fatores. Um deles é o preço dos produtos.

Suponhamos que precisemos adquirir um televisor.

A escolha de um determinado modelo e tamanho do televisor, além de outros fatores, também é *função* do preço.



Vejamos uma outra situação.

Dona Alice tem oito netos e preparou para eles um bolo. Ela dividiu o bolo em oito pedaços e embrulhou-os separadamente.

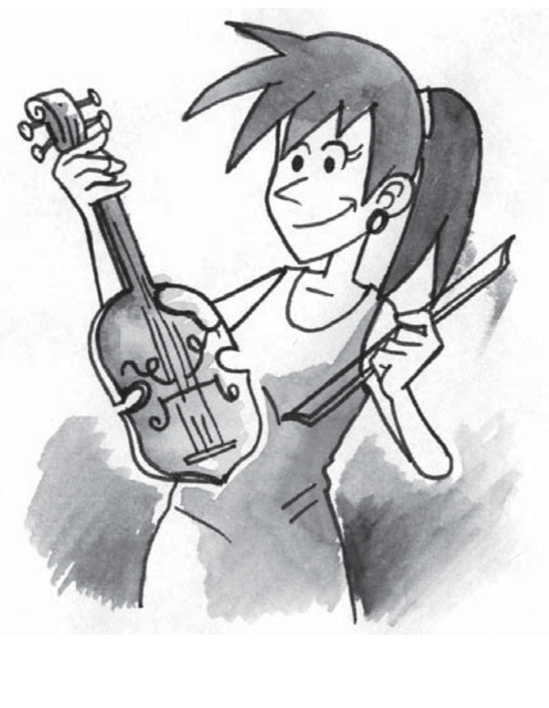
Assim, para cada neto de dona Alice *corresponderá* um pedaço do bolo. Ou seja, nenhum dos netos de dona Alice ficará sem bolo e cada um receberá apenas um pedaço.

Em matemática, esse tipo de correspondência é chamada de *função*.



Sentenças matemáticas representando funções

Selma sempre teve vontade de aprender a tocar violino. Sabendo, no entanto, que teria duas horas vagas na terça-feira e na sexta-feira resolveu concretizar seu sonho.



Ela foi a uma escola de música e obteve a seguinte informação:

Matrícula: R$ 50,00

Mensalidade: R$ 35,00

Selma ficou em dúvida em relação a fazer a matrícula naquele momento, pois para ela era impor-

tante saber quanto gastaria em um ano com as aulas, e assim ver se esse curso iria caber em seu orçamento. Para descobrir quanto iria gastar ela procedeu da seguinte maneira:

Chamou de x o número de meses. Assim $35x$ seria o gasto envolvido em x meses de aula. Mas ainda faltava incluir a matrícula, assim ela obteve; $y = 35x + 50$, sendo que y seria o total gasto em x meses.

Portanto, concluiu Selma, que em um ano (12 meses) ela gastaria:

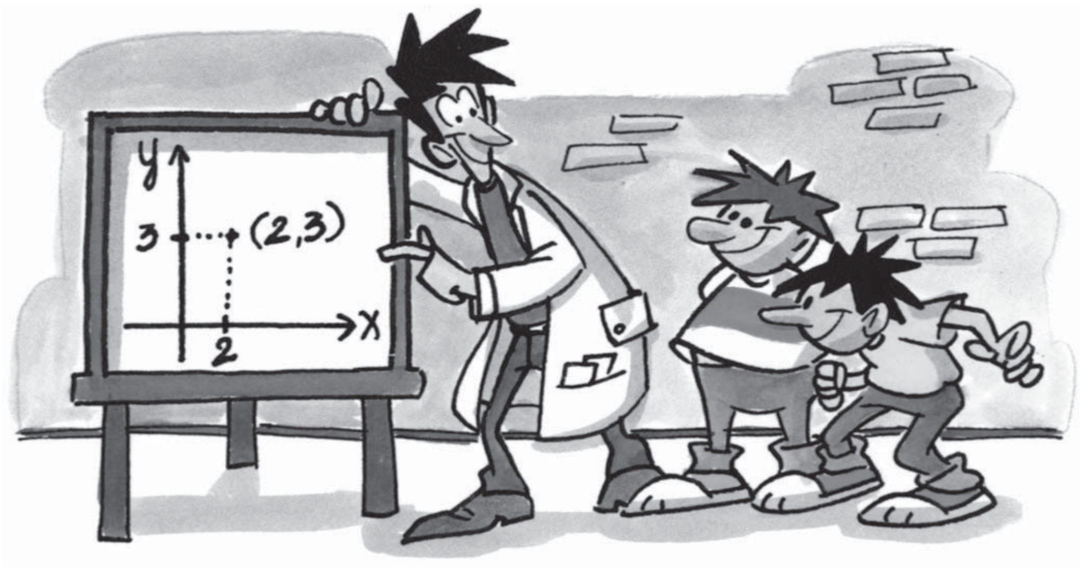
$$y = 35 \times 12 + 50$$

$$y = \text{R\$ } 470{,}00$$

E acabou por se matricular no curso que ela tanto queria!

Se Selma quisesse, ela poderia ter representado seus gastos mensais no curso de violino em um *gráfico cartesiano*.

Veremos a seguir como fazer esse tipo de análise.



GRÁFICOS CARTESIANOS

A representação de pontos na reta numerada já é bastante conhecida por você. Usando o mesmo critério, representamos pontos no plano cartesiano.

Para tanto, consideramos um sistema assim constituído:

- duas retas numeradas, perpendiculares entre si, chamadas de *eixos*, sendo o eixo horizontal *x* chamado de *eixo das abscissas* e o eixo vertical *y*, de *eixo das ordenadas*;
- o ponto de encontro dos eixos é chamado *origem do sistema* e indica o *zero* para cada um dos dois eixos;
- em ambos os eixos, a marcação dos pontos deverá ser feita com a mesma unidade de medida.

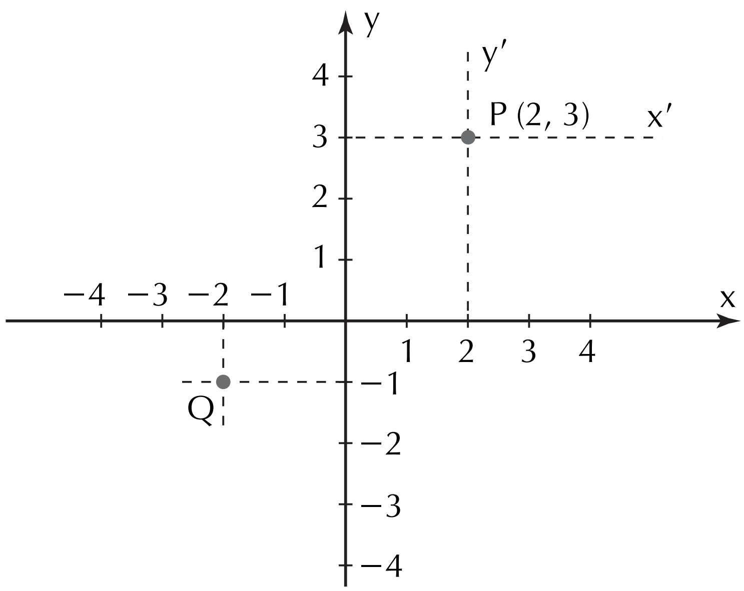
Um ponto, neste sistema assim formado, é representado por um *par ordenado*, em que o primeiro elemento deste ponto representa a abscissa e o segundo elemento representa a ordenada.

Para um ponto P, teríamos: P = (x, y).

Os elementos: $x, y \rightarrow$ são ambos denominados coordenadas do ponto em questão.

Exemplo

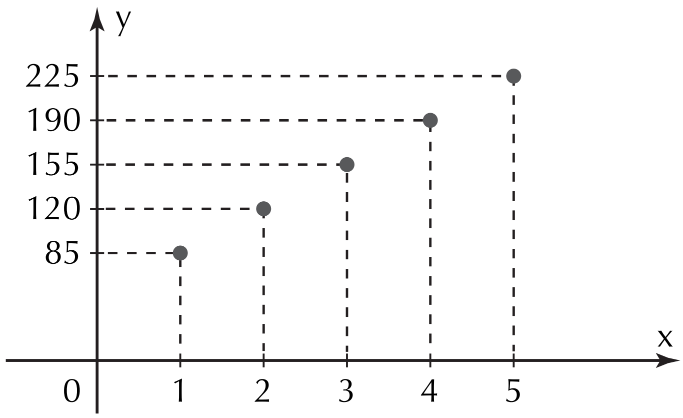
Vamos localizar o ponto P de coordenadas $x = 2$ e $y = 3$ e o ponto Q de coordenadas $x = -2$ e $y = -1$ no plano cartesiano:



Voltando então ao exemplo de Selma e seu curso de violino, cujo preço é representado pela fórmula $y = 35x + 50$, vamos representar seus gastos mensais em um plano cartesiano.

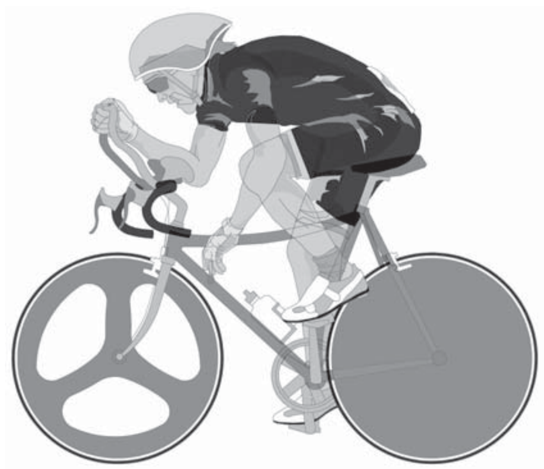
Seja $x \rightarrow$ o nº de meses e $y \rightarrow$ o total pago.

Mês (x)	*Total pago (y)*
1	$y = 35 \cdot 1 + 50 =$ R\$ 85,00
2	$y = 35 \cdot 2 + 50 =$ R\$ 120,00
3	$y = 35 \cdot 3 + 50 =$ R\$ 155,00
4	$y = 35 \cdot 4 + 50 =$ R\$ 190,00
5	$y = 35 \cdot 5 + 50 =$ R\$ 225,00



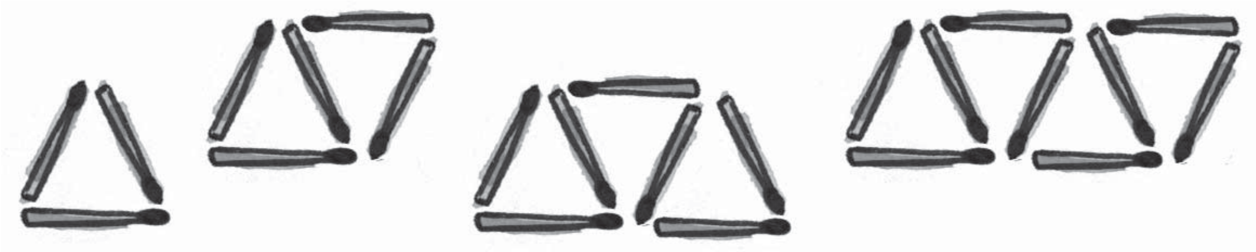
Exercícios

1. Um ciclista treina diariamente para participar de uma competição. Em cada dia de treino ele percorre 30 km.



   a) Quantos quilômetros ele terá percorrido em 4 dias de treinamento?
   b) Qual a fórmula que representa o número de quilômetros percorridos em *x* dias?
   c) Quantos quilômetros ele terá percorrido em 18 dias de treinamento?
   d) Construa um gráfico cartesiano para representar a quantidade de quilômetros percorridos em 7 dias de treinamento?

2. Observe a seqüência de triângulos formada pelos palitos:



Com base na seqüência de formação de triângulos, complete a tabela a seguir:

Nº de triângulos	*Nº de palitos*
1	3
2	5
3	7
4	....
5	....
6	....
7	....
8	....
n	....

a) Qual a lei de formação que relaciona o número de triângulos (n) com o números de palitos (y)?

b) Quantos palitos serão necessários para formar 95 triângulos?

c) Desenhe o gráfico dessa função.

FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

O custo da produção de pães em uma fábrica é dado pela fórmula:

$$y = 55x + 30$$

onde x é o número de horas e y é o custo total da produção de pães.

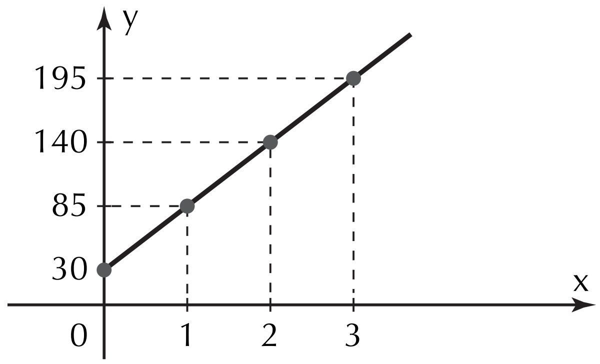
Nessa fórmula, para cada valor de x corresponde um único valor de y.

Dizemos então que x é função de y e que a fórmula $y = 55x + 30$ é uma *função do 1º grau.*

Esta fórmula é do tipo y = ax + b, onde $a = 55$ e $b = 30$.

Representando essa função do 1º grau em um plano cartesiano obtemos:

x	y
0	30
1	85
2	140
3	195
...	...



Podemos perceber pelo gráfico anterior que a representação de uma função de 1º grau no plano cartesiano é uma *reta*.

Portanto, para traçarmos o gráfico de uma função de 1º grau é suficiente conhecermos dois de seus pontos.

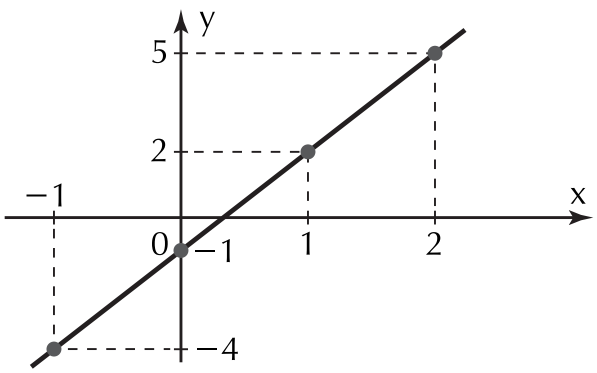
> Uma funcão do 1º grau é definida pela fórmula
> $y = ax + b$ com $a \neq 0$.

Exemplos

Vamos traçar os gráficos das funções de 1º grau a seguir:

a) $y = 3x - 1$

x	y
−1	−4
0	−1
1	2
2	5



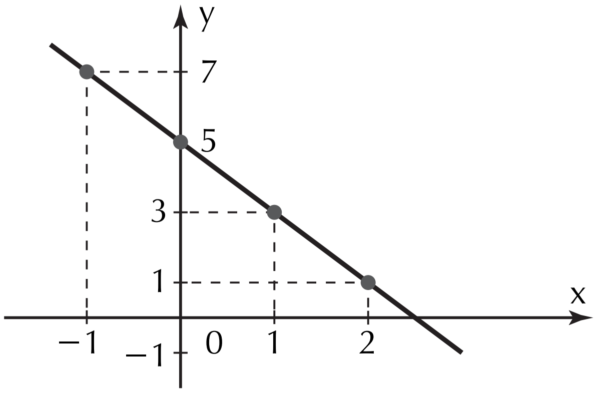
Observação 1

Como $a = 3 > 0$ temos a inclinação da reta para a direita.

Quando $a > 0$, dizemos que a função é *crescente*.

b) $y = -2x + 5$

x	y
-1	7
0	5
1	3
2	1



Observação 2

Como $a = -2 < 0$ temos a inclinação da reta para a esquerda.

Quando $a < 0$, dizemos que a função é *decrescente*.

Exercícios

3. Quais das fórmulas a seguir são funções do 1º grau:
   a) $y = x + 1$
   b) $y = 4 + x^2$
   c) $y = \frac{x}{7} + \frac{1}{2}$
   d) $y = x^3 + 8$

4. Uma vez identificadas as funções de 1º grau do exercício anterior, trace seus respectivos gráficos.

Raiz ou zero da função de 1º grau

Vamos analisar a função de primeiro grau $y = 3x - 6$.

Chamamos de *raiz* ou *zero* da função ao valor de x que faz com que y seja igual a zero.

Na nossa função teríamos, para $y = 0$:

$$0 = 3x - 6$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

Portanto x = 2 é a raiz dessa função.

De uma maneira geral, sendo a função de 1º grau $y = ax + b$, sua raiz será

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

Que será a raiz para toda a função de 1º grau.

Exercício

5. Reduza as funções de 1º grau a seguir para a forma $y = ax + b$ e em seguida determine para que valor de x, y é igual a zero.

   a) $7x + 21y = 14$

   b) $40y + 9x = 16$

   c) $55x + 15y = 5$

Exemplo:

$3x + 2y = 6$

$2y = 6 - 3x$

$y = \frac{6}{2} - \frac{3}{2}x$

$\boxed{y = -\frac{3}{2}x + 3}$

se $y = 0 \Rightarrow$

$-\frac{3}{2}x + 3 = 0$

$-\frac{3}{2}x = -3$

$\frac{3}{2}x = 3$

$3x = 6$

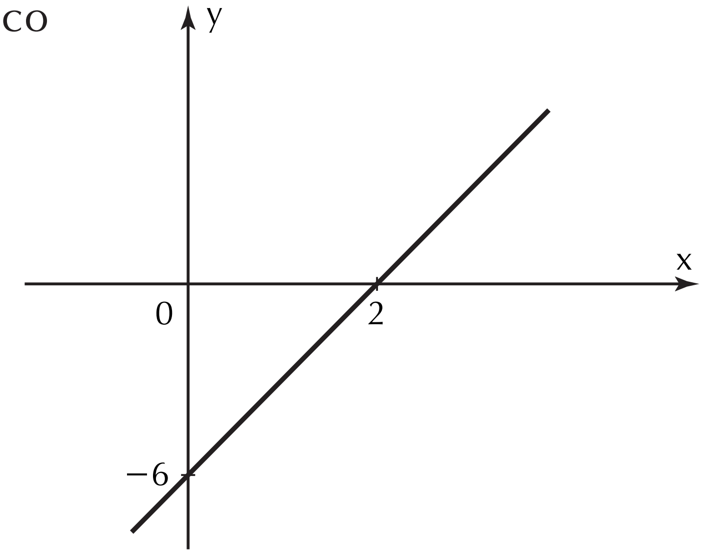
$\boxed{x = 2}$

Estudo de sinais da função de 1º grau

Como vimos no exemplo anterior da função de 1º grau $y = 3x - 6$, a raiz da função encontrada foi $x = 2$.

Tracemos agora o gráfico cartesiano dessa funcão.

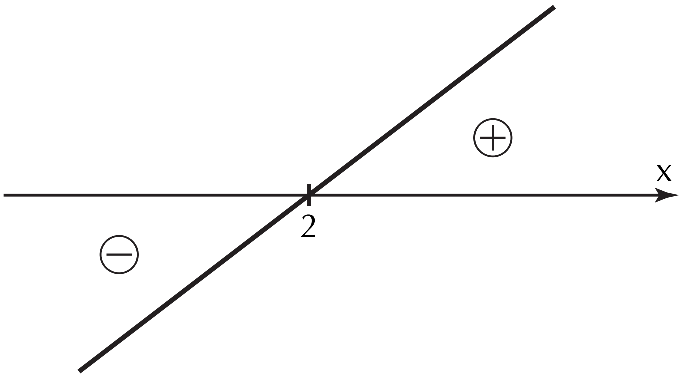
x	y
0	-6
2	0



Como podemos então confirmar pela observação do gráfico anterior, em $x = 2$ a reta corta o eixo x e que y para $x = 2$ assume o valor zero.

Agora podemos fazer a seguinte pergunta: o que aconteceu com o sinal de y para valores de x maiores e menores que 2?

Para respondê-la vamos "recortar" o gráfico anterior e analisar com mais atenção o que está acontecendo no eixo dos x:



Como podemos verificar, para valores de x maiores que $x = 2$, y assume valores positivos, enquanto que para valores de x menores que 2, y assume valores negativos.

Resumindo em liguagem matemática, temos;

$$\text{para } x > 2 \Rightarrow y > 0$$

$$\text{para } x = 2 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{para } x < 2 \Rightarrow y < 0$$

Exercícios

6. Estude o sinal das funções, construindo para tanto o respectivo gráfico.

   Exemplo: $y = 3x - 36$

   A raiz dessa função é:

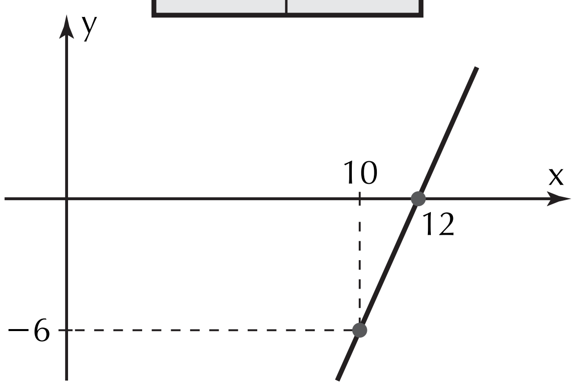
   $3x - 36 = 0$

   $3x = 36$

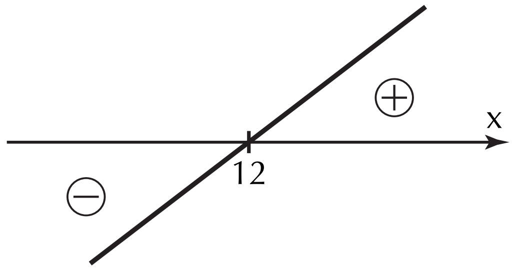
   $\boxed{x = 12}$

   Basta mais um ponto para traçarmos o gráfico da função:

x	y
12	0
10	−6



Tomando a parte do gráfico que corresponde ao eixo *x*.

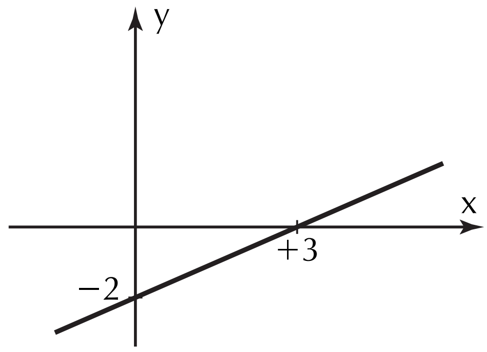


Portanto:
para $x > 12 \Rightarrow y > 0$
para $x = 2 \Rightarrow y = 0$
para $x < 2 \Rightarrow y < 0$

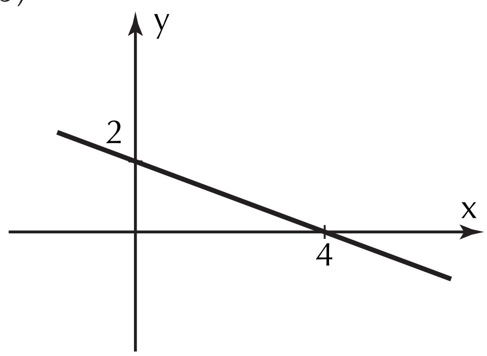
a) $y = -4x + 36$
b) $y = 5x + 35$
c) $y = -8x - 4$
d) $y = 6x$
e) $y = -5x$

7. Dados os gráficos a seguir faça o estudo de sinais.

a)



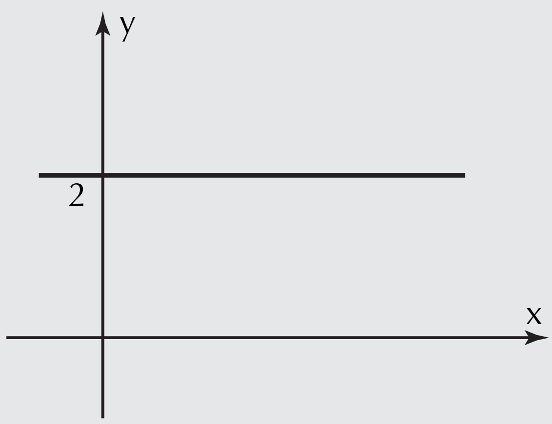
b)



Função constante (ou nula)

Na função constante temos $a = 0$ e assim a expressão da função de 1º grau $y = ax + b$ fica reduzida a $y = b$.

Seja, por exemplo, a função $y = 2$, o gráfico dessa função fica assim:



ou seja, paralelo ao eixo *x*.

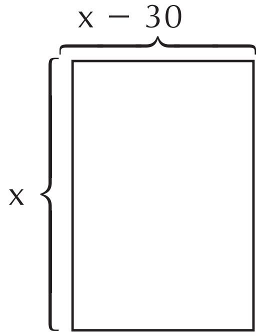
Nesse caso, para qualquer valor de x, y é sempre positivo, ou em linguagem matemática:

$$\forall x \Rightarrow y > 0$$

FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Algumas vezes, ao relacionarmos duas grandezas, obtemos fórmulas que envolvem expressões do 2º grau.

Veja no seguinte caso.



Para determinar a área de um terreno retangular dispúnhamos da seguinte informação: "a largura do terreno é 30 metros menor que seu comprimento".

Se chamarmos de x o comprimento do terreno e $x - 30$ a sua largura, para calcular a área teríamos que multiplicar essas dimensões:

$$x(x - 30) = x^2 - 30x$$

Portanto, obtivemos uma fórmula, $y = x^2 - 30x$, que nos dá uma relação entre as medidas do terreno e sua área total, y.

A fórmula $y = x^2 - 30x$ é do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a = 1$, $b = -30$ e $c = 0$. Nesse caso, a área do terreno é uma funcão de 2º grau ou quadrática.

Agora, se soubéssemos de antemão que a área do terreno era de 400 m^2 e quiséssemos determinar quais as medidas de seus lados, poderíamos proceder da seguinte maneira:

$$400 = x^2 - 30x$$

ou ainda,

$$x^2 - 30x - 400 = 0$$

Resolvendo a equação de 2º grau pela fórmula de Bhashara, temos:

$$\Delta = 900 + 1.600$$

$$\Delta = 2.500$$

então

$$x = \frac{+30 \pm 50}{2} \quad \begin{cases} x_1 = -10 \\ x_2 = 40 \end{cases}$$

Como as dimensões de um terreno não podem ser negativas, a única solução válida nesse caso é $x = 40$ m.

Portanto, o terreno terá 40 m de comprimento e $40 - 30 = 10$ m de largura.

Gráfico cartesiano da função de segundo grau

A função do 2º grau $y = x^2 - 30x$ que representa a área do terreno citado anteriormente pode ser representada em um gráfico cartesiano.

O gráfico da função do 2º grau tem uma forma característica, a qual podemos observar na figura ao lado.



A essa forma dá-se o nome de parábola.

Para traçar este gráfico são necessários alguns pontos:

a) *As raízes ou zeros da função.*

No caso da nossa função, as raízes seriam:

$$x^2 - 30x = 0$$

Aplicando Bhashara:

$$\Delta = 900$$

$$x = \frac{30 \pm 30}{2} \quad x_1 = 30, \quad x_2 = 0$$

Chamaremos as raízes da função de segundo grau de P_1 e P_2, $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (30,0)$.

b) *A intersecção com o eixo dos y.*

A intersecção pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\text{para } x = 0 \rightarrow y = 0 - 30 \cdot 0 = 0$$

Chamaremos o ponto da intersecção de Q e nesse caso Q = (0,0)

c) *O vértice da parábola.*

O vértice da parábola pode ser determinado pelas seguintes regras:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

No nosso caso temos:

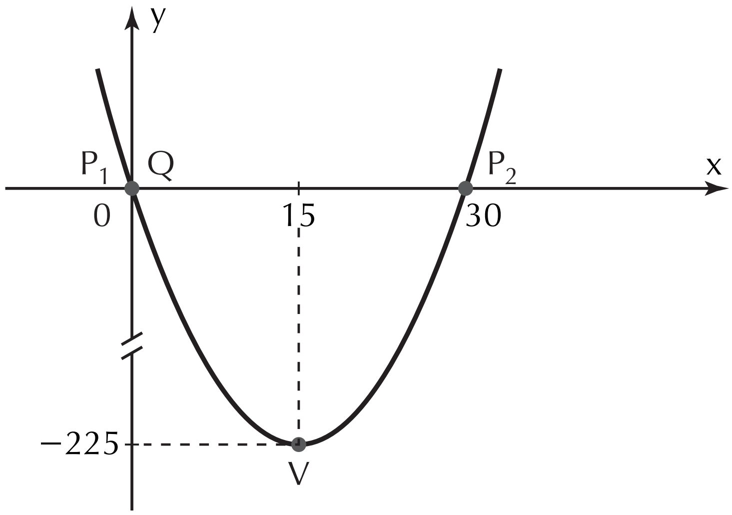
$$x_V = \frac{30}{2} = 15$$

$$y_V = -\frac{900}{4} = -225$$

Chamaremos o ponto que representa o vértice de V, nesse caso V = (15; −225).

d) *Construção do gráfico*:

Agora, com essas informações podemos traçar nosso gráfico:



Exemplos

Construa os gráficos das seguintes funções:

I. $y = x^2 - 4x + 3$

a) Raízes ou zeros: ($y = 0$)

$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow P_1 = (1, 0) \neq P_2 = (3, 0)$

b) Intersecção com o eixo y: ($x = 0$)

$y = (0)^2 - 4 \cdot (0) + 3 = 3 \rightarrow Q = (0; 3)$

c) Vértice:

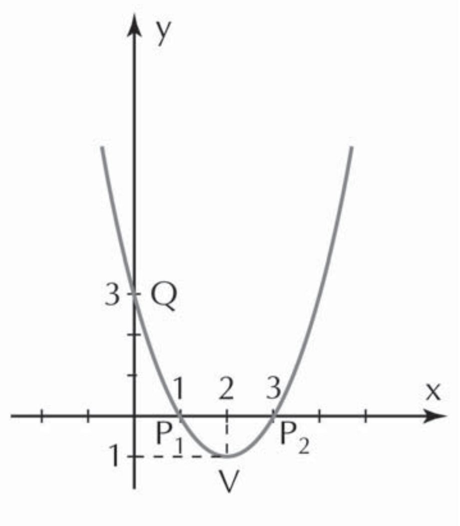
$$V = \left\{-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right\} = (2, -1)$$

$$x_V = \frac{-(-4)}{2 \cdot (1)} = 2$$

$$y_V = \frac{-4}{4 \cdot (1)} = -1$$

$V = (2,1)$

d) Construção do gráfico:



II. $y = x^2 - 6x + 9$

a) Raízes ou zeros: ($y = 0$)

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$P_1 = P_2 = (3, 0)$

b) Intersecção com o eixo y: ($x = 0$)

$y = 0 - 6 \cdot 0 + 9$

$y = 9$

$Q = (0, 9)$

c) Vértice:

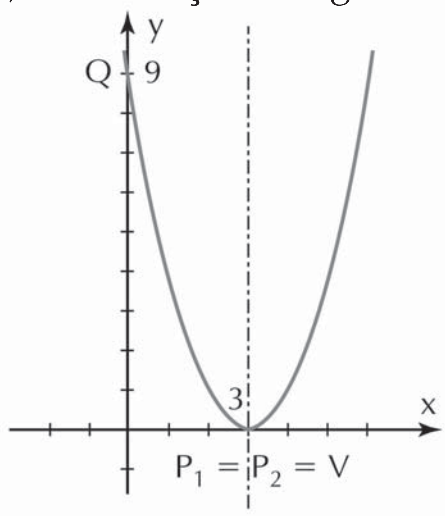
$$x_V = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_V = -\frac{(36 - 4 \cdot 1 \cdot 9)}{4}$$

$y_V = 0$

$V = (3, 0)$

d) Construção do gráfico:



Exercício

8. Construa o gráfico cartesiano das seguintes funções do 2º grau

a) $y = x^2 - 6x + 8$

b) $y = 2x^2 + 3x - 5$

c) $y = x^2 - 4x + 4$

d) $y = -x^2 + 2x - 1$

e) $y = 3x^2 - x + 1$

f) $y = -x^2 - 6x - 9$

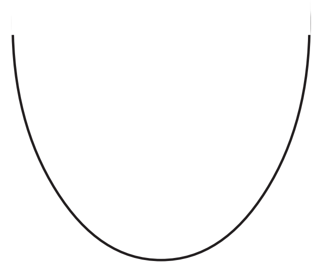
Estudo dos gráficos das funções de 2º grau

Seja a função de 2º grau

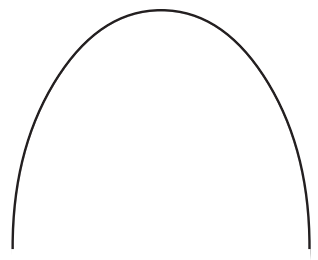
$y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ ($\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$)

1. *Concavidade da parábola*

Se $a > 0$ então a concavidade da parábola será voltada para cima:



Se $a < 0$ então a concavidade da parábola será voltada para baixo:



2. *Raízes ou zeros*

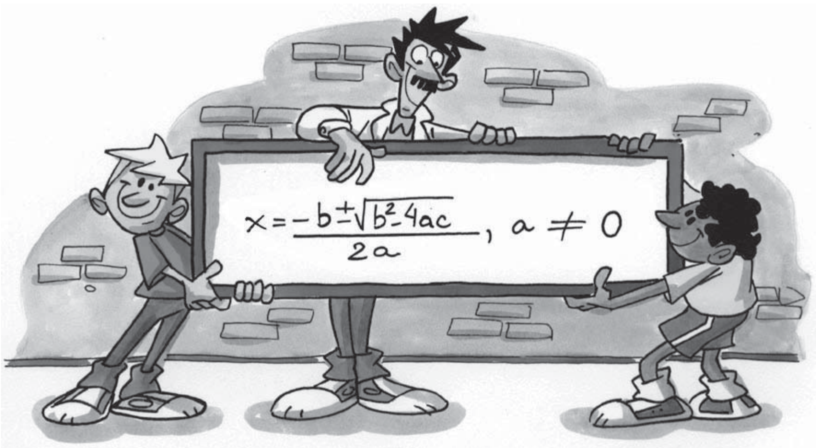
Como vimos anteriormente, a existência e a quantidade de raízes, para uma equação do segundo grau, depende única e exclusivamente do Δ (discriminante).

Assim:

$\Delta > 0 \rightarrow$ duas raízes $\in \mathbb{R}$ e distintas

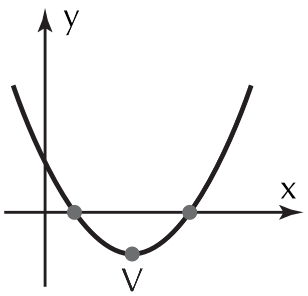
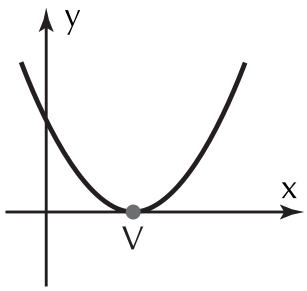
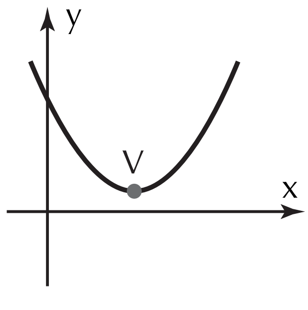
$\Delta = 0 \rightarrow$ duas raízes $\in \mathbb{R}$ e idênticas

$\Delta < 0 \rightarrow \nexists$ raízes $\in \mathbb{R}$

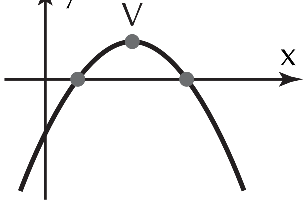
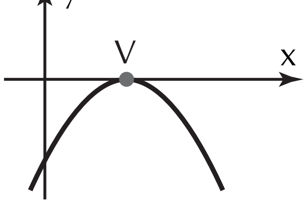
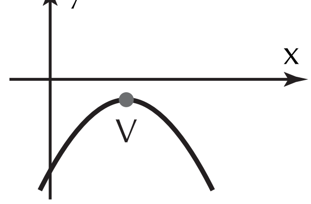


Da reunião das informações sobre concavidade da parábola e raízes das equações de segundo grau, podemos desenvolver o seguinte resumo:

$a > 0$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
• há duas raízes $\in \mathbb{R}$ distintas com dois pontos de intersecção com o eixo x. 	• há duas raízes reais iguais e um único ponto de intersecção com o eixo x. 	• não existem raízes reais e a parábola não “toca” o eixo x. 

$a < 0$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
		

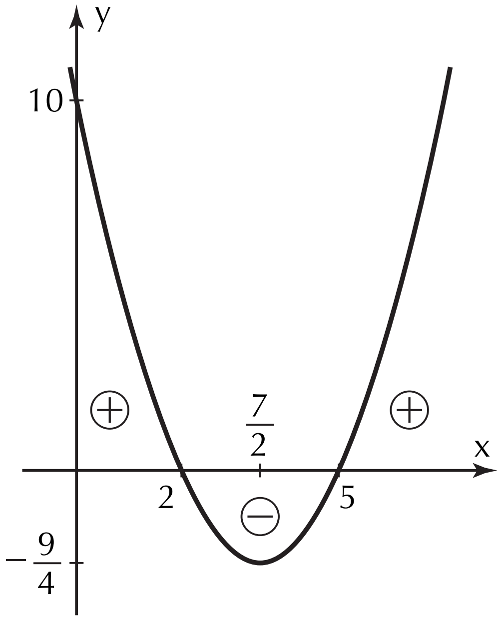
Estudo de sinais da função de 2º grau

A exemplo do estudo de sinais que fizemos para as funções de primeiro grau, agora também estamos interessados em saber o que acontece com o valor de *y* para os valores de *x* diferentes das raízes, mas agora para as funções de 2º grau.

Tomemos como exemplo a função:

$$y = x^2 - 7x + 10$$

O esboço do gráfico dessa função é dado ao lado.



Podemos observar que para valores de x menores que 2, *y* assume valores positivos. Quando *x* varia de 2 até 5, *y* assume valores negativos e para valores de *x* maiores que 5, temos que *y* assume valores positivos novamente.

Resumindo essas informações usando a linguagem matemática temos:

$$\text{para } x < 2 \Rightarrow y > 0$$
$$\text{para } 2 < x < 5 \Rightarrow y < 0$$
$$\text{para } x > 5 \Rightarrow y > 0$$

Exemplos

Vamos estudar os sinais das funções de segundo grau a seguir:

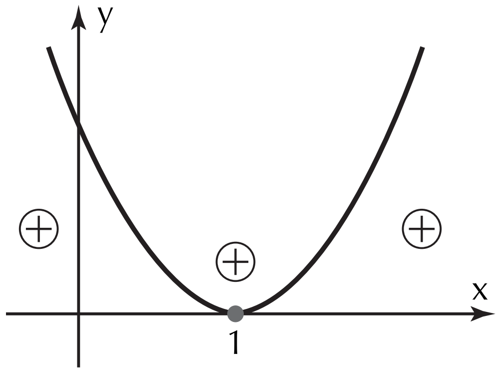
a) $y = x^2 - 2x + 1$

Vamos então esboçar o gráfico da função.

Para tanto determinamos as suas raízes:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Delta = 4 - 4 = 0$$
$$x = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

Como $\Delta = 0$, a função possui duas raízes reais e iguais. Como $a = 1 > 0$, então o gráfico tem concavidade voltada para cima. O esboço do gráfico é mostrado ao lado:



Assim, o estudo de sinais para essa função fica:

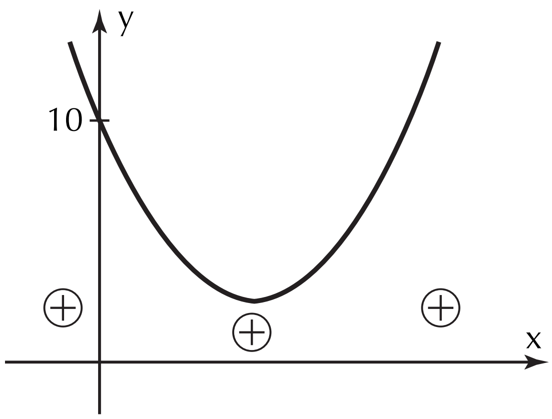
$$\text{para } x < 1 \Rightarrow y > 0$$
$$\text{para } x = 1 \Rightarrow y = 0$$
$$\text{para } x > 1 \Rightarrow y > 0$$

b) $y = 2x^2 - 3x + 10$

Novamente, vamos esboçar o gráfico da função, mas primeiro precisamos encontrar suas raízes:

$$2x^2 - 3x + 10 = 0$$
$$\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 10$$
$$\Delta = 9 - 80$$
$$\Delta = -71 < 0$$

Como $\Delta < 0$, a função não possui raízes reais. Como $a = 2 > 0$ então o gráfico da função tem concavidade voltada para cima. O esboço do gráfico é mostrado abaixo:



Assim o estudo de sinais para essa função é:

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ y > 0$$

c) $y = -x^2 + 7x - 10$

As raízes dessa função são:

$y = -x^2 + 7x - 10$

$\Delta = 49 - 4\,(-1)\,(-10)$

$\Delta = 49 - 40$

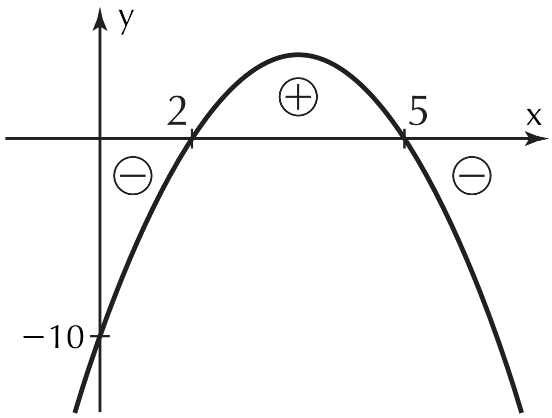
$\Delta = 9 > 0$

$$x = \frac{-7 \pm 3}{-2}$$

$x_1 = 5,\ x_2 = 2$

Como $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais e distintas. Porém, nesse caso $a = -1 < 0$, portanto a concavidade da parábola é voltada para baixo.

O esboço do gráfico fica:



O estudo de sinais para essa função fica assim:

para $x < 2 \Rightarrow y < 0$

para $2 < x < 5 \Rightarrow y > 0$

para $x > 5 \Rightarrow y < 0$

Exercício

9. Estude os sinais das funções do exercício 8.

Valor máximo e valor mínimo da função de 2º grau

Seja a função de 2º grau: $y = ax^2 + bx + c$ na qual desejamos saber para que valor de "x" o trinômio passa por um ponto de máximo ou mínimo.

Esse estudo envolve a expressão que nos fornece o x e o y do vértice da parábola.

Para $x = -\frac{b}{2a}$ a função y passa por um valor máximo ou mínimo dado por:

$$y = -\frac{\Delta}{4a}$$

Observa-se que o valor máximo ou mínimo dependerá do sinal de "a".

Novamente se $a > 0$, $y = -\frac{\Delta}{4a}$ será o ponto máximo. Da mesma maneira, se $a < 0$, $y = -\frac{\Delta}{4a}$ será o ponto mínimo.

Dos exemplos a seguir vamos determinar os pontos de máximo ou mínimo das funções de 2º grau.

Exemplo 1

$y = x^2 - 7x + 12$

As raízes dessa função são $x = 3$ e $x = 4$.

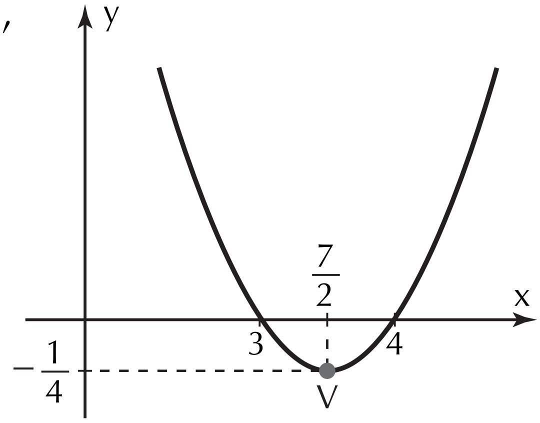
Como $a = +1 > 0 \rightarrow$ (y passa por um ponto de mínimo)

Para: $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-7)}{2 \cdot (+1)} = \frac{7}{2}$,

o gráfico da função passa por

um ponto de mínimo dado por:

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-1}{4 \cdot (1)} = -\frac{1}{4}$$



Exemplo 2

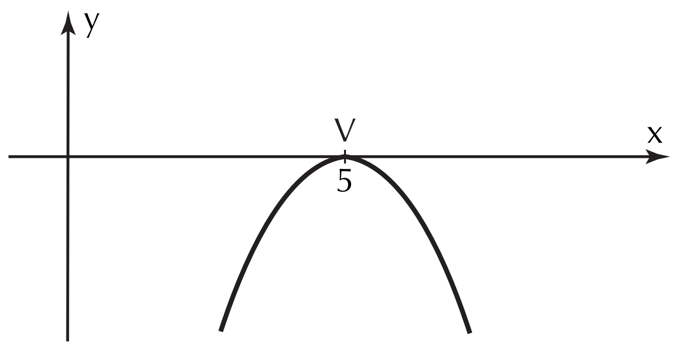
$y = -x^2 + 10x - 25$

A raiz dessa função é x = 5

Como $a = -1 < 0 \rightarrow$ (y passa por um ponto de máximo)

Para: $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(+10)}{2(-1)} = \dfrac{-10}{-2} = 5$, o gráfico da função passa por um ponto de máximo, dado por:

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-0}{4 \cdot (-1)} = 0$$

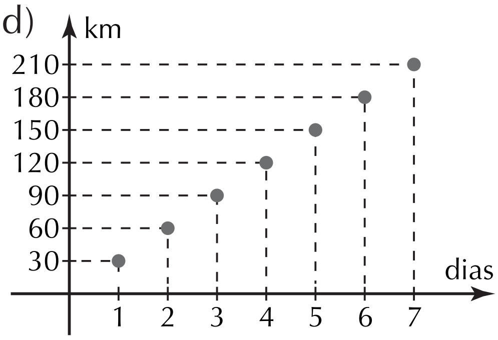


Exercícios

10. Determinar os pontos de máximo ou mínimo das funções do exercício 8.

Respostas

1. a) 120 km
   c) 540 km
   b) $y = 30x$
   d)



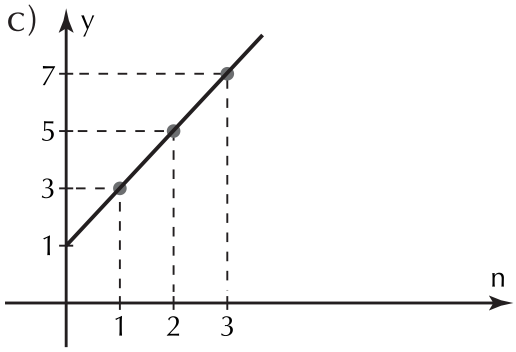
2.

Nº de triângulos	*Nº de palitos*
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17
n	2n + 1

a) $y = 2n + 1$

b) 191 palitos

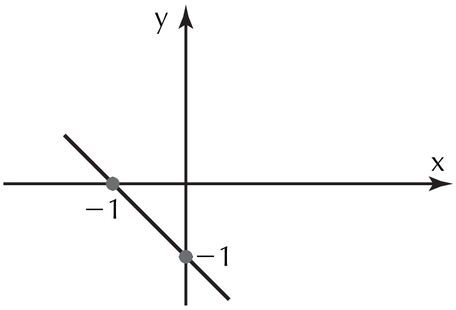
c)



3. a e c

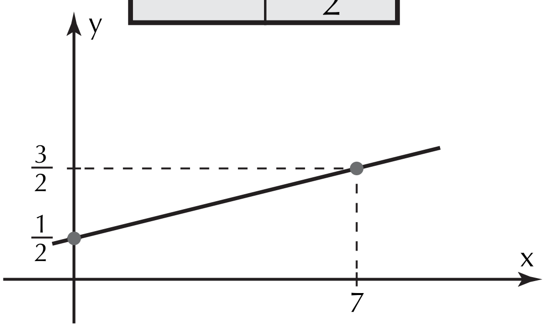
4. $y = x + 1$

x	y
0	-1
-1	0



$y = \frac{x}{7} + \frac{1}{2}$

x	y
0	$\frac{1}{2}$
7	$\frac{3}{2}$



5. a) $y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}$

$x = 2$

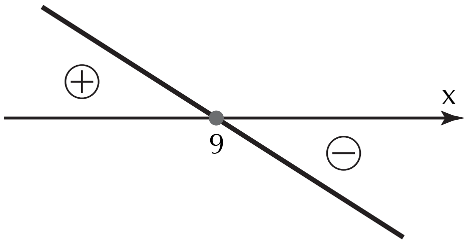
b) $y = -\frac{9x}{40} + \frac{2}{5}$

$x = \frac{16}{9}$

c) $y = -\frac{11x}{3} + \frac{1}{3}$

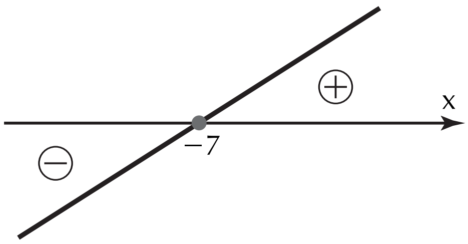
$x = \frac{1}{11}$

6. a)



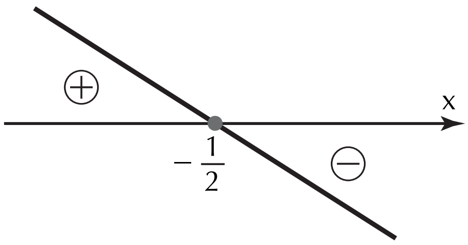
para $x < 9 \Rightarrow y > 0$
para $x = 9 \Rightarrow y = 0$
para $x > 9 \Rightarrow y < 0$

b)



para $x < -7 \Rightarrow y < 0$
para $x = -7 \Rightarrow y = 0$
para $x > -7 \Rightarrow y > 0$

c)

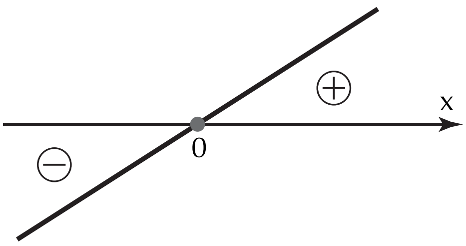


para $x < -\frac{1}{2} \Rightarrow y > 0$

para $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$

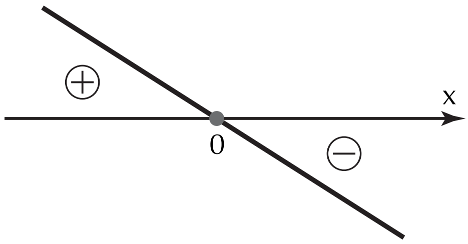
para $x > -\frac{1}{2} \Rightarrow y < 0$

d)



para $x < 0 \Rightarrow y < 0$
para $x = 0 \Rightarrow y = 0$
para $x > 0 \Rightarrow y > 0$

e)

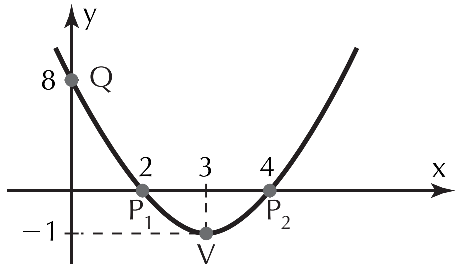


para $x < 0 \Rightarrow y > 0$
para $x = 0 \Rightarrow y = 0$
para $x > 0 \Rightarrow y < 0$

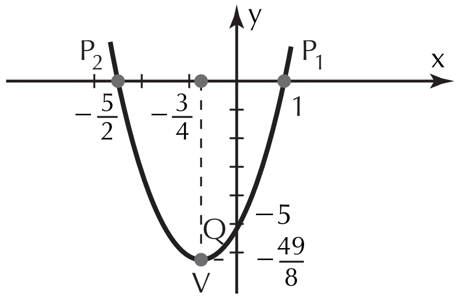
7. a) para $x < 3 \Rightarrow y < 0$
para $x = 3 \Rightarrow y = 0$
para $x > 3 \Rightarrow y > 0$

b) para $x < 4 \Rightarrow y > 0$
para $x = 4 \Rightarrow y = 0$
para $x > 4 \Rightarrow y < 0$

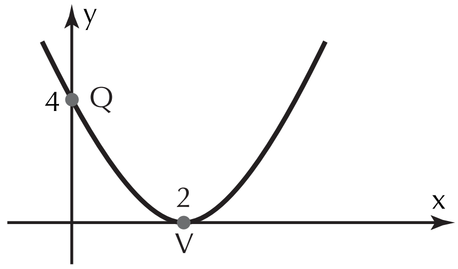
8. a)



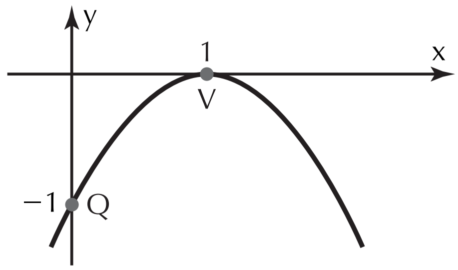
b)



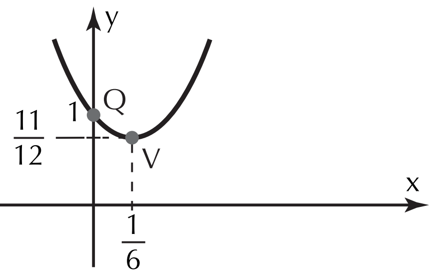
c)



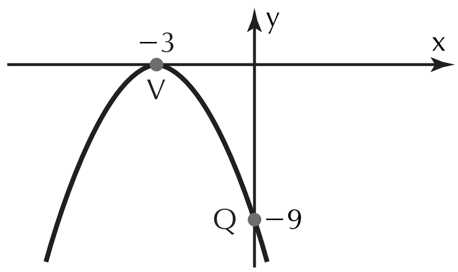
d)



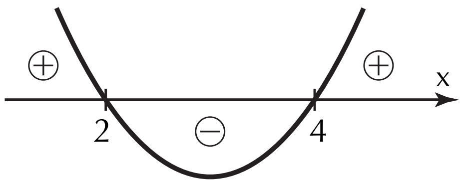
e)



f)



9. a)

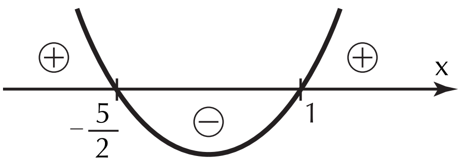


para $x < 2 \Rightarrow y > 0$

para $2 < x < 4 \Rightarrow y < 0$

para $x > 4 \Rightarrow y > 0$

b)

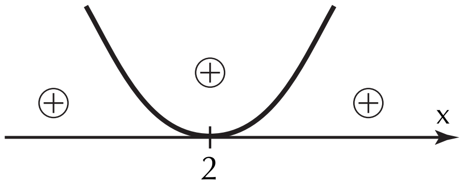


Para $x < -\dfrac{5}{2} \Rightarrow y > 0$

Para $-\dfrac{5}{2} < x < 1 \Rightarrow y < 0$

Para $x > 1 \Rightarrow y > 0$

c)

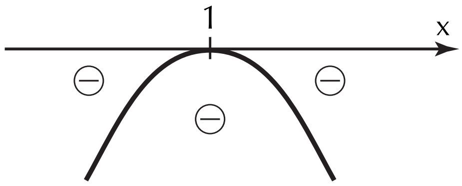


para $x < 2 \Rightarrow y > 0$

para $x = 2 \Rightarrow y = 0$

para $x > 2 \Rightarrow y > 0$

d)

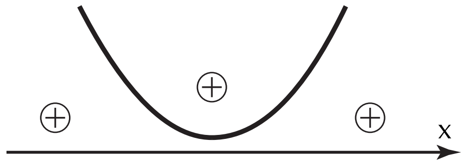


para $x < 1 \Rightarrow y < 0$

para $x = 1 \Rightarrow y = 0$

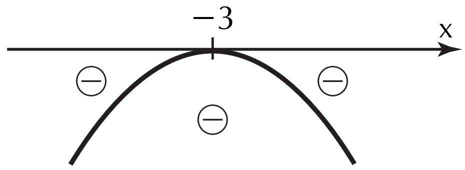
para $x > 1 \Rightarrow y < 0$

e)



$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$

f)



para $x < -3 \Rightarrow y < 0$

para $x = -3 \Rightarrow y = 0$

para $x > -3 \Rightarrow y < 0$

10. a) ponto de mínimo
$x = 3$ e $y = -1$

b) ponto de mínimo

$x = -\dfrac{3}{4}$ e $y = -\dfrac{49}{8}$

c) ponto de mínimo
$x = 2$ e $y = 0$

d) ponto de máximo
$x = 1$ e $y = 0$

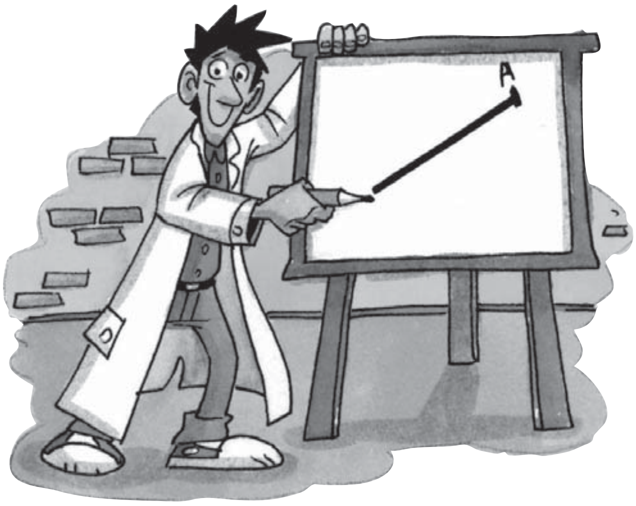
e) ponto de mínimo

$x = \dfrac{1}{6}$ e $y = \dfrac{11}{12}$

f) ponto de máximo
$x = -3$ e $y = 0$



Capítulo 16



GEOMETRIA

Geometria significa *geo* = terra e *metria* = medida, ou seja, medida da Terra.

Uma das questões mais interessantes que envolvem o início do estudo da geometria é que acreditava-se na época que a Terra era plana, e todas as pesquisas baseavam-se nessa premissa falsa, o que não impediu, entretanto, o desenvolvimento da geometria.

Foi no período entre 500 a 300 a.C. que a geometria se firmou como um sistema organizado e em grande parte isso se deve a Euclides, mestre na escola de Alexandria (Egito), que em 325 a.C. publicou *Os elementos*, uma obra com treze volumes, que propunha um sistema para o estudo da geometria.

As aplicações da geometria em questões práticas remonta a milhares de anos.

No Egito, a geometria era usada para medir as terras que ficavam às margens do Rio Nilo e que depois dos períodos de inundação eram divididas para o cultivo.

Era necessário que essas medições fossem precisas, pois eram cobrados impostos pelo uso da terra.

Outros povos também se ocuparam com o desenvolvimento da geometria, entre eles os gregos.

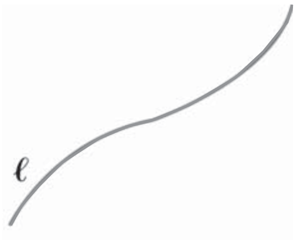
No nosso estudo usaremos um novo conjunto, semelhante aos nossos estudos anteriores, porém nesse caso trata-se de um conjunto de pontos.

Como toda obra (casa, prédio etc.) que começamos tem de ter certos alicerces, a geometria também tem os seus, que são conhecidos por entes geométricos e não possuem definições.

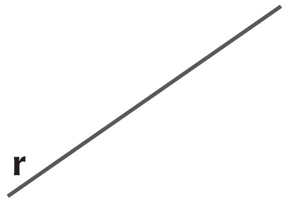
Exemplificando, temos:

Ponto

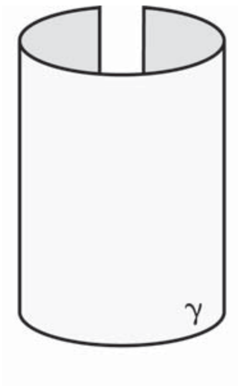
• **P**



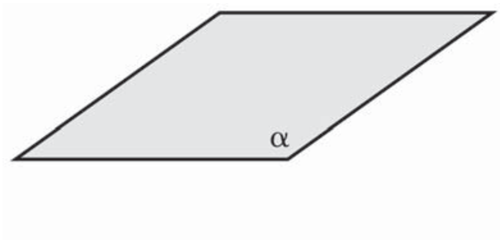
Linha



Reta



Superfície



Plano

A nomenclatura que adotamos para tais entes geométricos é a seguinte:

Ponto Letras maiúsculas do alfabeto latino.

Exemplos

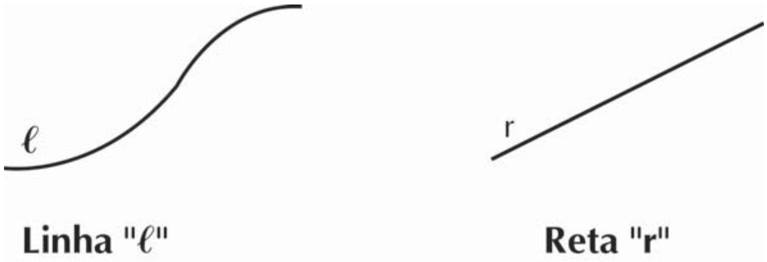
• P

Ponto "P"

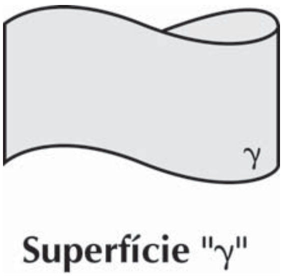
• Q

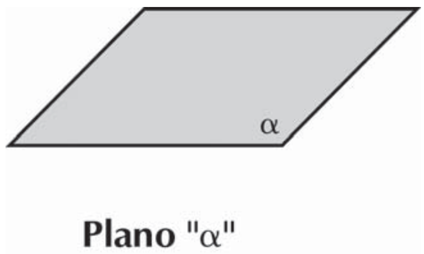
Ponto "Q"

Retas e linhas Letras minúsculas do alfabeto latino.



Planos e superfícies Letras minúsculas do alfabeto grego.





Espaço

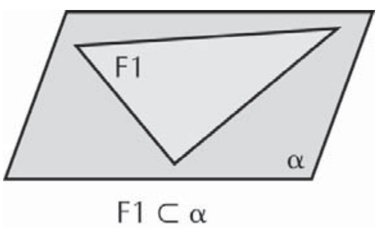
Entende-se por *espaço* o conjunto de todos os pontos.

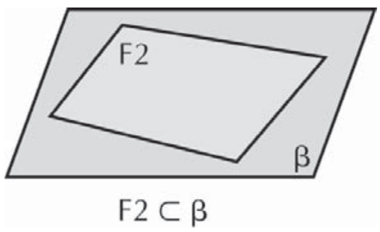
Figura geométrica

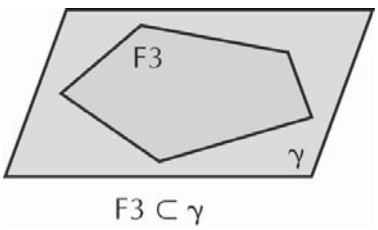
Entende-se por *figura geométrica* todo e qualquer conjunto de pontos. Logo, concluiremos a existência de dois tipos de figuras geométricas:

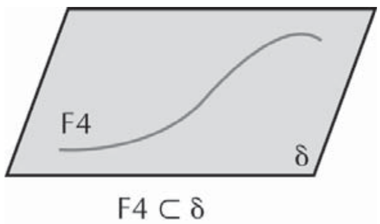
Figuras geométricas planas: quando o conjunto de pontos considerados está situado numa *superfície plana*.

Exemplos



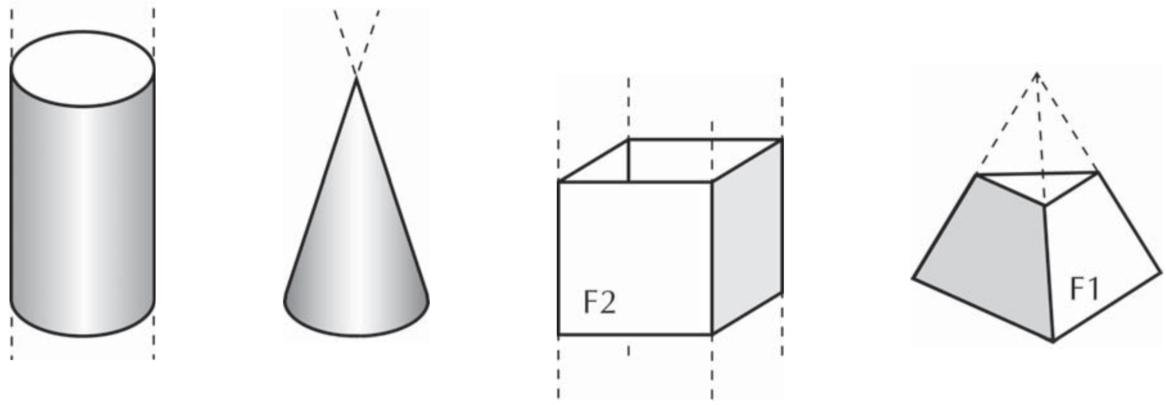






Figuras geométricas espaciais: quando o conjunto de pontos considerados está situado numa *superfície não-plana*.

Exemplos



Postulado

Em *geometria*, entende-se por postulado toda e qualquer proposição por nós já conhecida e aceita sempre como verdadeira.

Teorema

Entende-se por *teorema* toda e qualquer proposição que necessita de um ou mais postulados para comprovação de sua veracidade.



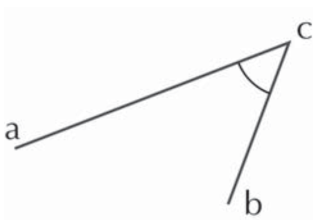
Exercício

1. Classifique as figuras a seguir como figuras geométricas planas e figuras geométricas espaciais.

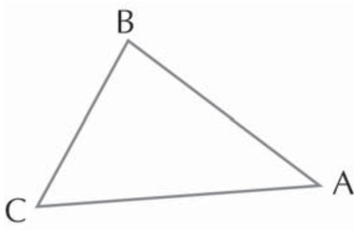
a)



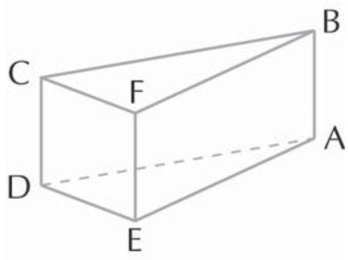
b)



c)



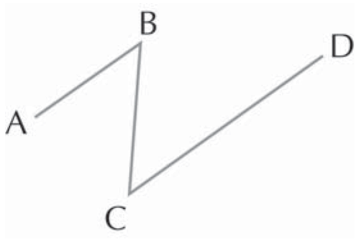
d)



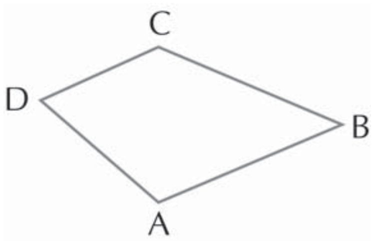
e)



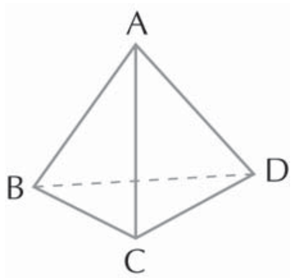
f)



g)

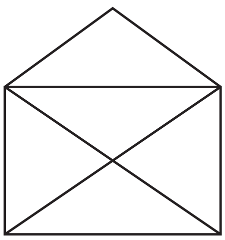


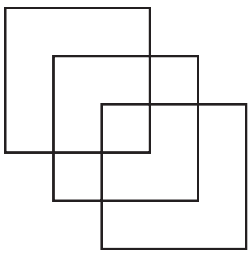
h)

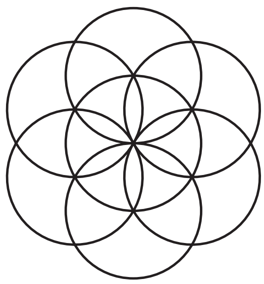


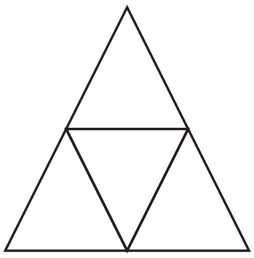
Desafio

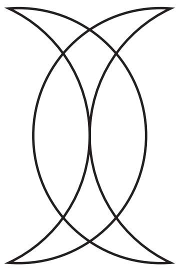
2. Sem levantar o lápis do papel, nem passar duas vezes ou mais pela mesma linha, desenhe essas figuras (chamadas gráficos eulerianos).

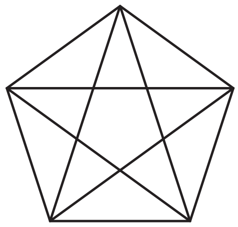












LINHAS PLANAS

Já vimos:

Linha



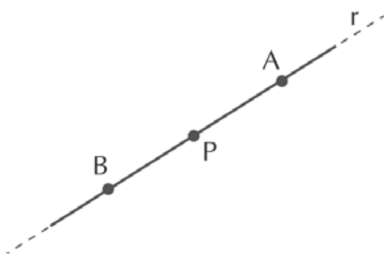
Reta



Agora veremos algumas definições simples mas muito importantes para a linguagem que usaremos daqui por diante.

Semi-reta

Denomina-se semi-reta a cada uma das regiões em que a reta ficou dividida segundo um de seus pontos.



Elementos da figura:

r → reta suporte das semi-retas

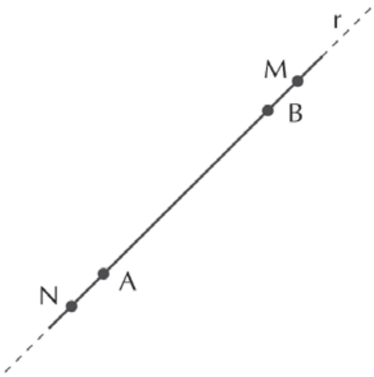
P → origem das semi-retas

$\overrightarrow{PA}$ → semi-reta

$\overrightarrow{PB}$ → semi-reta

Segmento de reta

Chama-se segmento de reta, nesse caso, o trecho da reta suporte com extremos nos pontos A e B.



Elementos da figura:

r → reta suporte das semi-retas

A → origem das semi-retas:

$\overline{AB}$ → segmento de reta

Desafio

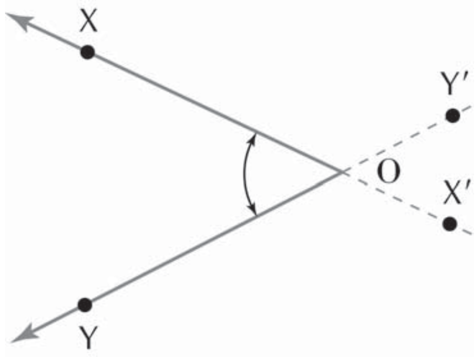
3. A figura representa um terreno onde estão situadas sete casas:



Trace três segmentos de reta que dividam a figura em sete regiões, de tal maneira que em cada uma delas haja sempre uma casa.

Clube de Matemática.

ÂNGULOS



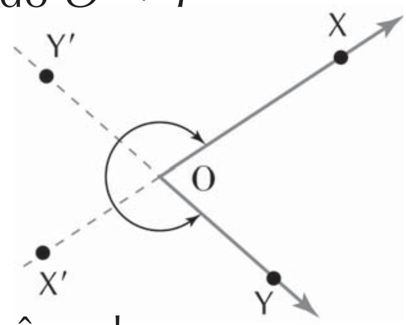
Ângulo é a região do plano limitada por duas semi-retas de mesma origem.

Elementos:

$O \quad \rightarrow$ vértice

$\overrightarrow{OX} \rightarrow$ semi-reta de origem O e sentido $O \rightarrow X$

$\overrightarrow{OY} \rightarrow$ semi-reta de origem O e sentido $O \rightarrow Y$



$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{OX} \\ \overrightarrow{OY}\end{matrix}\right\}$ semi-retas dos lados do ângulo

$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{OX}\,' \\ \overrightarrow{OY}\,'\end{matrix}\right\}$ semi-retas opostas aos lados do ângulo

Indicação:

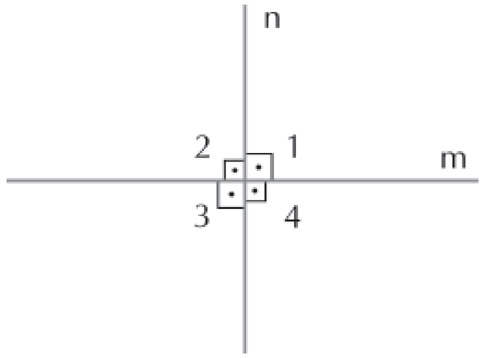
Poderemos indicar um ângulo por uma letra maiúscula encimada por um acento circunflexo ($\widehat{O}$), ou simplesmente por um número encimado por um acento circunflexo ($\widehat{1}$), ou, ainda, pelas três letras que expressam o vértice e os lados, sendo que a representativa do vértice (encimada por acento circunflexo, ou não) fica entre as duas que representam os lados ($X\widehat{O}Y$ ou XOY).



RETAS PERPENDICULARES

Consideremos, duas retas *m* e *n*.

Caso os quatro ângulos formados sejam congruentes (iguais), diremos que *m* e *n* são perpendiculares e assim indicaremos:



Usamos o símbolo ≃ para aproximações. Cuidado para não confundi-lo com o símbolo ≅ que significa congruente.

$m \perp n \rightarrow$ (lê-se: *m* "perpendicular a" *n*)

Logo: $\widehat{1} \cong \widehat{2} \cong \widehat{3} \cong \widehat{4} \rightarrow m \perp n$

Cada um desses ângulos é chamado de *ângulo reto*.

MEDIDA DE UM ÂNGULO PLANO

Unidade legal de ângulo (no sistema brasileiro) é o ângulo reto (*r*).

Os submúltiplos do ângulo reto (*r*) são os seguintes:

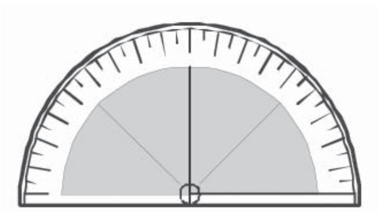
Denominação	*Simbologia*	*Valores*
grau sexagesimal ou grau	°	$\frac{1}{90}r$
minuto de ângulo ou minuto	′	$\frac{1}{60}$ de grau
segundo de ângulo ou segundo	″	$\frac{1}{60}$ de minuto

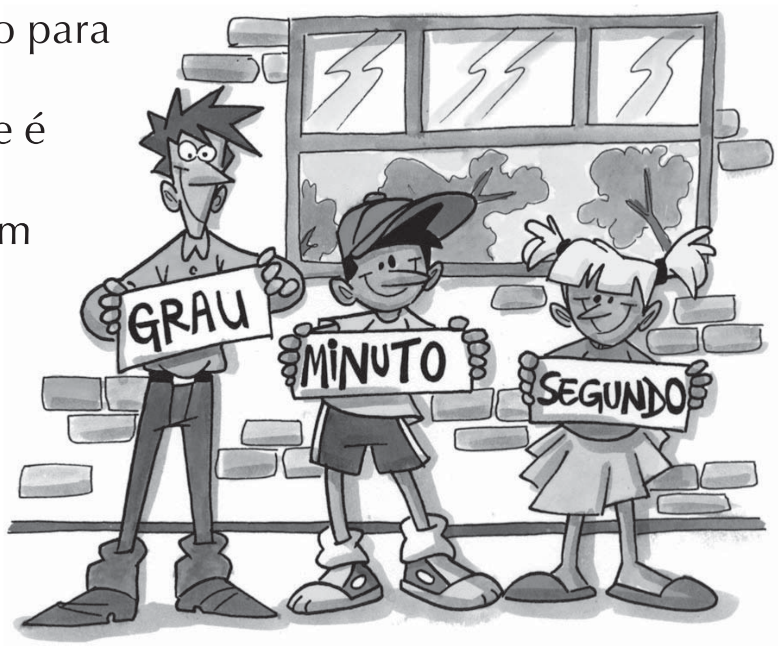
Grau

Como vimos no nosso próprio texto, afirmamos que o ângulo reto mede 90° e o ângulo raso mede 180°. Mas qual a razão para que os valores sejam justamente esses?

Para responder a essa questão devemos nos reportar ao ano de 4.000 a.C., quando egípcios e árabes tentavam elaborar um calendário. Acreditava-se, nessa época, que o Sol levava 360 dias para dar uma volta completa em torno da Terra. Dessa maneira, a cada dia, a Terra percorria 1/360 dessa órbita, e assim a esse arco de circunferência fez-se corresponder um ângulo que passou a ser uma unidade de medida e foi chamada *grau*.

O instrumento usado para medição de ângulo é o *transferidor*. Geralmente é apresentado como um semicírculo graduado em graus e em frações de grau.





OPERAÇÕES ALGÉBRICAS COM ÂNGULOS

Vamos a seguir aprender a realizar operações com ângulos. Veja com atenção os exemplos:

Exemplo 1

1. Calcule:
   a) $26° + 38°40' + 27°50'$

Solução

$$\begin{array}{r} 26°00' \\ +\ \ 38°40' \\ 27°50' \\ \hline 91°90' \end{array} \longrightarrow 91°(60' + 30') \longrightarrow 92°30'$$

b) $38°40' - 27°50'$

Solução

$$\begin{array}{r} 38°40' \\ -\ \ 27°50' \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 37°100' \\ -\ \ 27°\ \ 50' \\ \hline 10°\ \ 50' \end{array}$$



c) $3 \times 38°40'$

Solução

$$\begin{array}{r} 38°40' \\ \times \quad\ \ 3 \\ \hline 114°120' \end{array} \longrightarrow 114°(60' + 60') \rightarrow 116°$$

d) $85°42'45'' : 3$

Solução

$$\begin{array}{l|l} 85°42'45'' & 3 \\ \cline{2-2} 25° & 28°34'15'' \\ \ \ 1° = 60' & \\ \quad\quad\ \ 42' & \\ \cline{1-1} \quad\quad 102' & \\ \quad\quad\ \ 12' & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad 0'45'' & \\ \quad\quad\quad\quad 15'' & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad\quad 00 & \end{array}$$



Exemplo 2

Calcular os valores das medidas do complemento, suplemento e replemento do ângulo cuja medida é $37°12'42''$.

Solução

Cálculo do *complemento*: $90° - 37°12'42''$

$$\begin{array}{r} 89°59'60'' \\ -37°12'42'' \\ \hline 52°47'18'' \end{array}$$

Cálculo do *suplemento*: $180° - 37°12'42''$

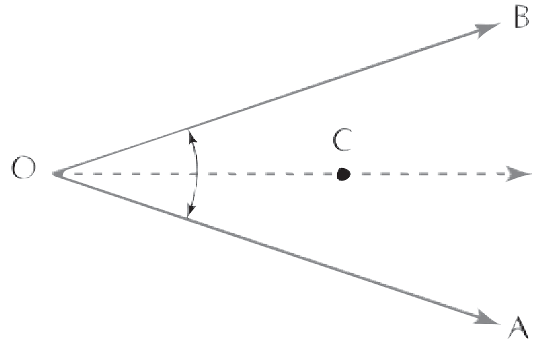
$$\begin{array}{r} 179°59'60'' \\ -\ 37°12'42'' \\ \hline 142°47'18'' \end{array}$$

Cálculo do *replemento*: $360° - 37°12'42''$

$$\begin{array}{r} 359°59'60'' \\ -\ 37°12'42'' \\ \hline 322°47'18'' \end{array}$$

Bissetriz de ângulo

Define-se como bissetriz de um ângulo a semi-reta que, a partir do vértice, divide o ângulo em duas regiões congruentes. Assim, a $\overrightarrow{OC}$ divide o ângulo $A\hat{O}B$ em duas regiões: $A\hat{O}C \cong C\hat{O}B$.



Exercício

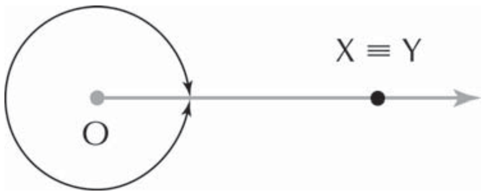
4. Efetue:
   a) $32°20' + 42°00' + 27°08'$
   b) $72°49' - 36°28'$
   c) $28°40' + 27°20'$
   d) $38°28' - 29°47'$
   e) $24°20' \times 3$
   f) $97°36'36'' : 3$

CLASSIFICAÇÃO DOS ÂNGULOS

Quanto a suas medidas

1. *Ângulo nulo ou de uma volta*

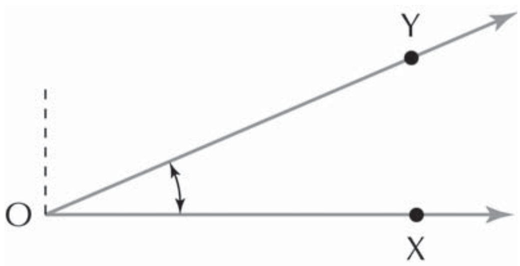
Chama-se *ângulo nulo*, ou *ângulo de uma volta*, ao ângulo cuja medida vale: 0° ou 360°, respectivamente.



2. *Ângulo agudo*

Chama-se *ângulo agudo* ao ângulo cuja medida vale:

$$0° < X\hat{O}Y < 90°$$

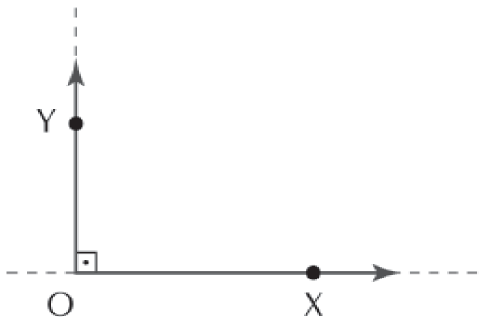


3. *Ângulo reto*

Chama-se *ângulo reto* ao ângulo cuja medida vale:

$$X\hat{O}Y = 90°$$

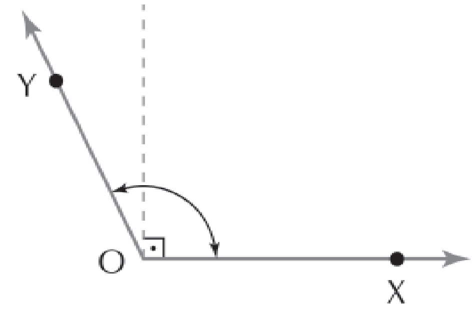
Ou seja, os lados do ângulo estão sobre retas perpendiculares.



4. *Ângulo obtuso*

Chama-se *ângulo obtuso* ao ângulo cuja medida vale:

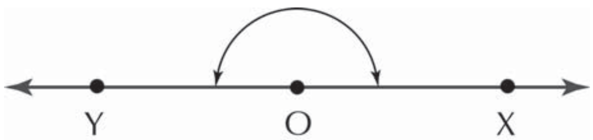
$$90° < X\hat{O}Y < 180°$$



5. *Ângulo raso ou de meia-volta*

Chama-se *ângulo raso*, ou *ângulo de meia-volta*, o ângulo cuja medida vale:

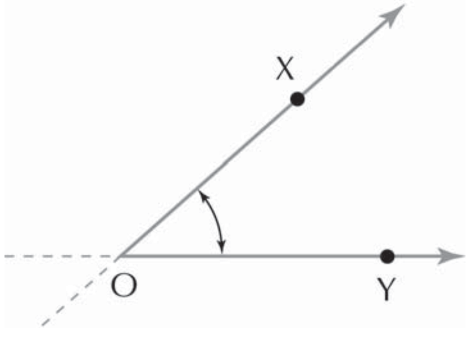
$$X\hat{O}Y = 180° = 2 \text{ retos}$$



Quanto a seus lados

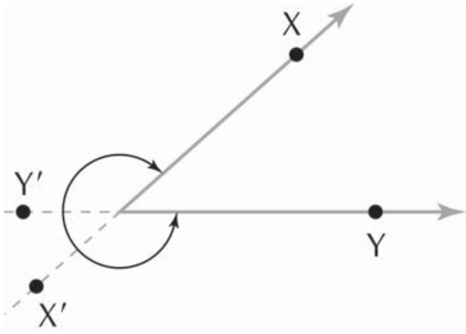
1. *Ângulo convexo*

Chama-se *ângulo convexo* ao ângulo que não contém as semi-retas opostas aos lados dele. (Pode-se denominá-lo como ângulo agudo.)



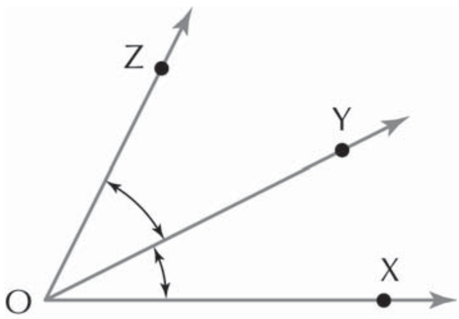
2. *Ângulo côncavo*

Chama-se *ângulo côncavo* ao ângulo que contém as semirretas opostas aos lados dele. (Pode-se denominá-lo como ângulo obtuso.)



3. *Ângulos consecutivos*

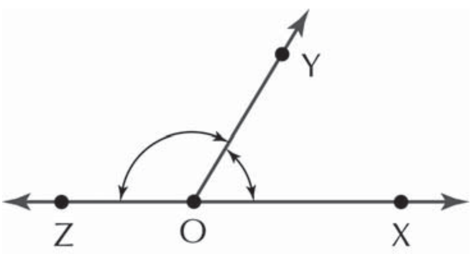
Chamam-se *ângulos consecutivos* aos ângulos que possuem em comum o vértice e um lado.



No nosso caso, os ângulos $X\hat{O}Y$ e $Y\hat{O}Z$ são consecutivos, assim como $X\hat{O}Y$ e $X\hat{O}Z$, pois possuem o mesmo vértice e um lado comum.

4. *Ângulos adjacentes*

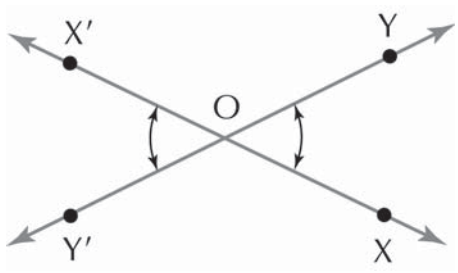
São ângulos consecutivos que não possuem pontos comuns.



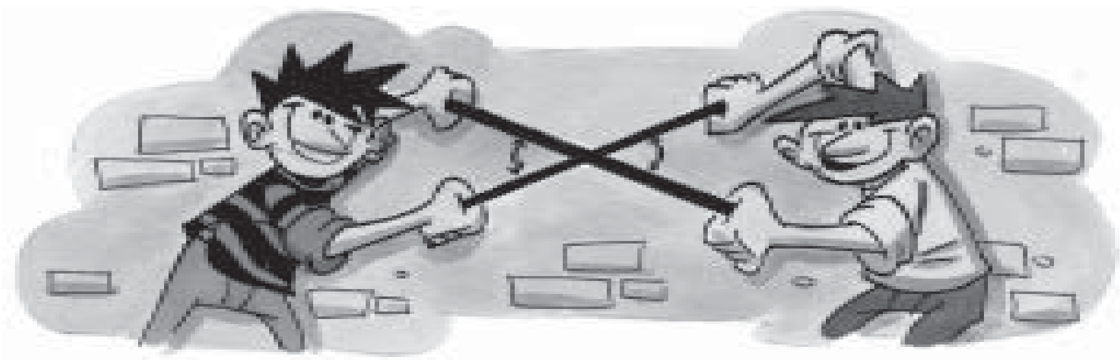
$X\hat{O}Y$ e $X\hat{O}Z$ são adjacentes.

5. *Ângulos opostos pelo vértice*

Chamam-se ângulos opostos pelo vértice aos ângulos que possuem em comum o vértice e cujos lados são semi-retas opostas dos lados do outro.



No nosso caso, $X\hat{O}Y$ e $X'\hat{O}Y'$ são opostos pelo vértice.



Exemplo 1

Qual a medida do ângulo que somado à sua quarta parte, reproduz 30°?

Seja *x* a medida do ângulo procurado:

$$x + \frac{x}{4} = 3$$

$$\frac{4x + x}{4} = 30$$

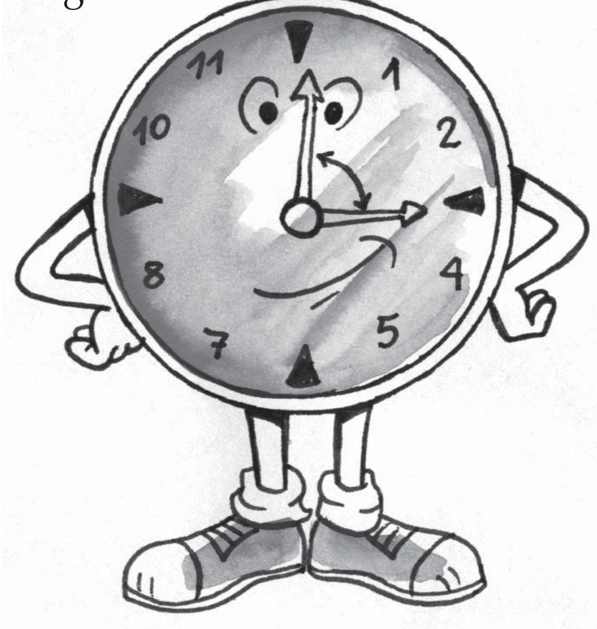
$$5x = 120$$

$$x = \frac{120}{5}$$

$$x = 24°$$

Exemplo 2

Qual o menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio a seguir:



Se a circunferência corresponde a 360°, a cada divisão entre as horas corresponde a um ângulo de $\frac{360}{12} = 30°$.

Logo, como o ponteiro das horas está em 3 e o dos minutos está em 12, temos entre os dois ponteiros um ângulo de $3 \times 30° = 90°$ ou um ângulo reto.

Exercícios

5. O triplo da medida de um ângulo adicionado ao seu complemento reproduz 180°. Qual é a medida do ângulo?

6. O dobro da medida de um ângulo (x) somado com o triplo da medida de um ângulo (y) é 89°18′. Sabendo-se que a soma de suas medidas é 38°30′, calcule os valores de suas medidas.

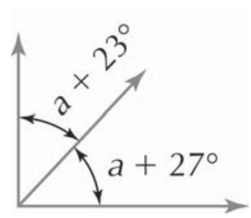
7. Qual o valor da medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos complementares?

8. Qual o valor da medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos suplementares?

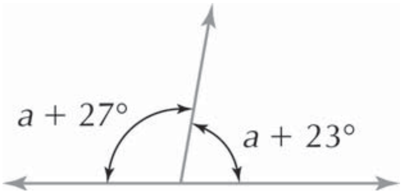
9. Qual o valor da medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos replementares?

10. Calcule o valor de $\hat{a}$ nas figuras abaixo:

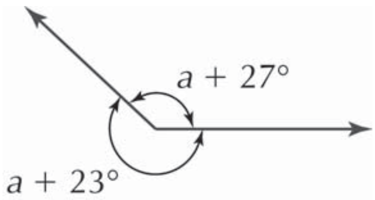
    a)



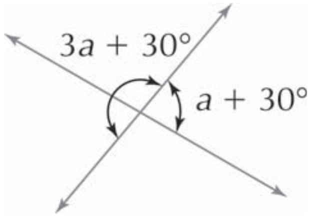
b)



c)



d)

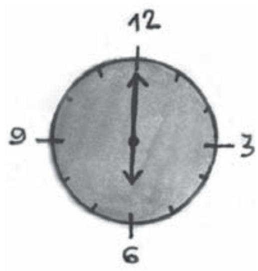


11. Se ao complemento da medida de um ângulo adicionarmos o dobro da medida dele e somarmos 30°, obteremos um ângulo cuja medida é 180°. Pergunta-se: qual a medida do ângulo?

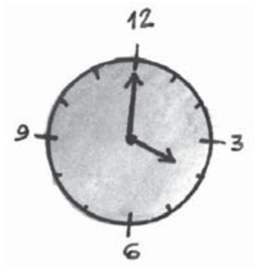
12. Se do dobro do suplemento da medida de um ângulo subtrairmos o triplo do complemento da medida dele, obteremos um ângulo cuja medida vale 120°. Pergunta-se: qual a medida do ângulo?

13. Qual o menor ângulo formado pelos ponteiros dos relógios a seguir?

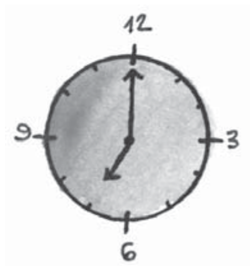
a)



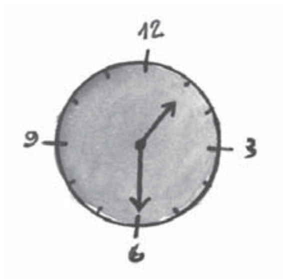
b)



c)



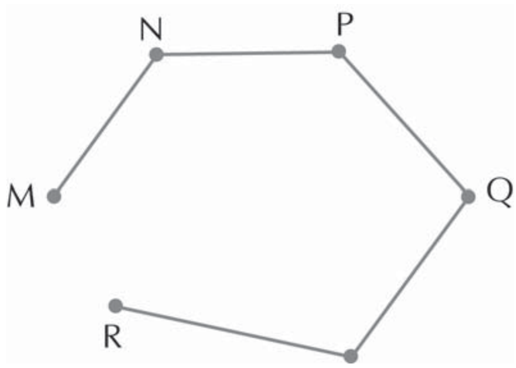
d)





LINHA POLIGONAL

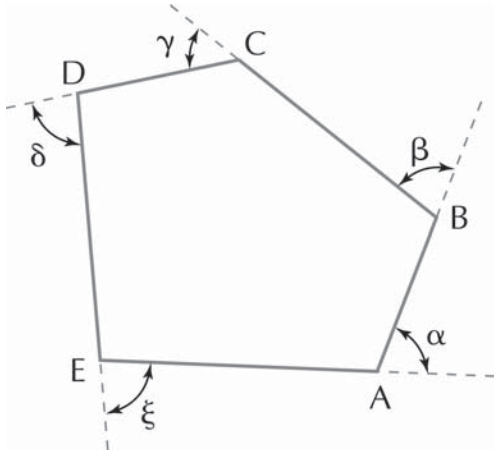
Ao conjunto de segmentos consecutivos: $\overline{MN}$, $\overline{MP}$, ... dá-se o nome de linha poligonal. No caso da nossa figura, M é chamado de origem da poligonal e R é conhecido por extremidade da poligonal.



Dois casos podem ocorrer: $M \equiv R$ e $M \not\equiv R$. No primeiro caso, trata-se de uma *poligonal fechada*, e no segundo caso, trata-se de uma *poligonal aberta*.

POLÍGONO

Denomina-se *polígono* toda região do plano limitada por uma linha poligonal fechada, em que os lados não se cruzam (poligonal simples).



Elementos principais dos polígonos

- Vértices do polígono: A, B, C, ...
- Lados do polígono: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{EA}$
- Diagonais do polígono: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, ... (segmentos de reta que unem dois vértices não consecutivos dele).
- Ângulos internos: $E\widehat{A}B \cong \widehat{A}$; $A\widehat{B}C \cong \widehat{B}$; $B\widehat{C}D \cong \widehat{C}$; ...
- Ângulos externos: α, β, ξ, δ, ...: obtém-se o ângulo externo de um polígono tomando-se um dos lados e o prolongamento de um de seus lados adjacentes.

Classificação

A classificação dos polígonos pode ser feita de dois modos diferentes: ou em relação ao número de lados, ou em relação ao número de ângulos.

Assim, temos:

	Ao número de lados	*Ao número de ângulos*
3	Trilátero	Triângulo
4	Quadrilátero	Quadrângulo
5	Pentalátero	Pentágono
6	Hexalátero	Hexágono
7	Heptalátero	Heptágono
8	Octalátero	Octógono
9	Enealátero	Eneágono
10	Decalátero	Decágono
11	Undecalátero	Undecágono
12	Dodecalátero	Dodecágono
⋮	⋮	⋮
15	Pentadecalátero	Pentadecágono
⋮	⋮	⋮

Os polígonos ainda podem ser:

- *regulares* → quando possuem:
  – todos os ângulos internos congruentes, e
  – todos os lados também congruentes.
- *irregulares* → quando uma das duas condições acima não é verificada.

DIAGONAL

Denomina-se diagonal de um polígono o segmento de reta que une dois vértices não-consecutivos dele.

Número de diagonais (d)

Consideremos um polígono convexo de um número qualquer de lados. A esse número chamaremos de n e procederemos da seguinte maneira:

- em cada um dos vértices (n vértices no caso), tracemos todas as diagonais;
- como temos n vértices, teremos então: $n(n - 3)$ diagonais por todos os vértices;
- mas procedendo assim chegaremos a um vértice que já possua as diagonais traçadas, e o vértice está situado justamente na metade do número de vértices dele. Logo, para obtermos o número de diagonais de um polígono convexo, deveremos dividir o resultado por 2.

Logo, o número de diagonais de um polígono convexo de n lados tem por expressão:

$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Exemplo 1

Quantas diagonais possui um polígono de 6 lados?

Solução:

$$\begin{cases} d = \dfrac{n(n-3)}{2} \\ n = 6 \end{cases}$$

Então:

$$d = \frac{6(6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

Logo: d = 9 diagonais.

Exemplo 2

Determinar o polígono cujo número de diagonais é igual ao número de lados.



Solução

$$\begin{cases} d = \dfrac{n(n-3)}{2} \\ d = n \end{cases}$$

Então:

$$n = \frac{(n-3)\cdot n}{2} \rightarrow n - 3 = 2$$

$$n = 2 + 3$$

$$n = 5$$

Logo esse polígono é o pentágono ($n = 5$).

Exercícios

14. Determine o número de diagonais (d) de um polígono que possui:

a) $n = 3$

b) $n = 4$

c) $n = 5$

d) $n = 6$

e) $n = 7$

f) $n = 8$

g) $n = 9$

h) $n = 10$

i) $n = 15$

j) $n = 20$ (icoságono)

15. Determine o polígono que possui:

a) $d = n$

b) $d = 2n$

c) $d = 3n$

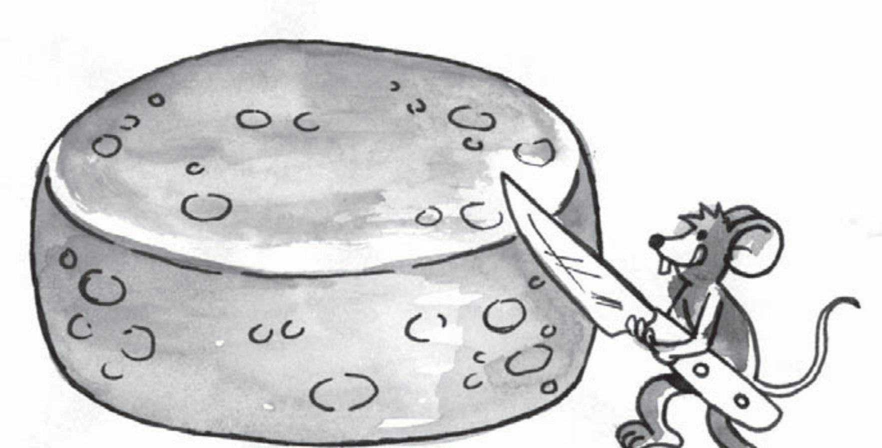
d) $d = \dfrac{n}{2}$

e) $d = 6n$

f) $d = 4n$

Desafio

16. Com três cortes apenas, divida o queijo em oito partes iguais:

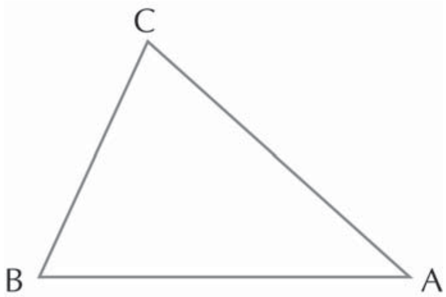


Fonte: *Clube de Matemática.*

ESTUDO DOS TRIÂNGULOS

Dá-se o nome de *triângulo* ao polígono de três lados.

Na figura a seguir, temos:



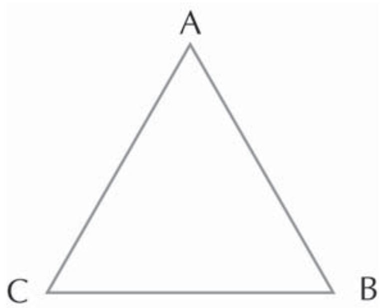
- vértices do triângulo: *A*, *B*, *C*
- lados do triângulo: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

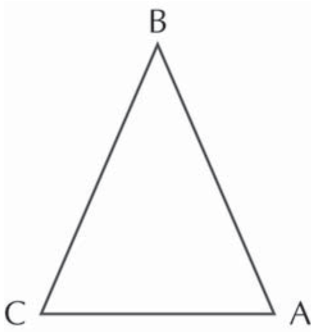
Classificação

- *Quanto às dimensões dos lados*

Eqüilátero: quando possui três lados com a mesma medida.

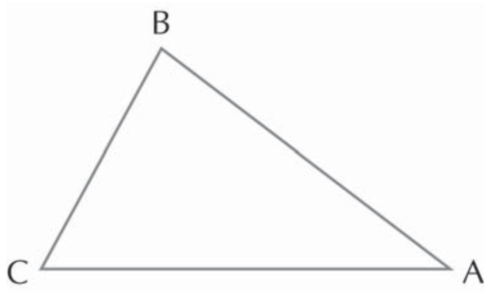
Logo: $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$





Isósceles: quando possui dois lados com a mesma medida.

Logo: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$



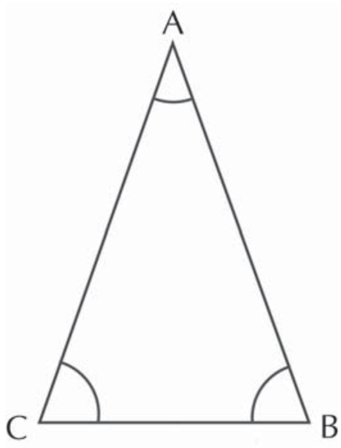
Escaleno: quando os três lados possuem medidas desiguais.

Logo: $\overline{AB}$ não $\cong$ $\overline{BC}$;

$\overline{BC}$ não $\cong$ $\overline{CA}$;

$\overline{AC}$ não $\cong$ $\overline{AB}$;

- *Quanto às medidas dos ângulos*



Acutângulo: quando possui três ângulos agudos.

Logo:

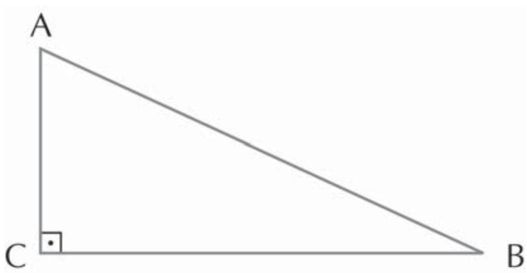
$0° < \widehat{A} < 90°$

$0° < \widehat{B} < 90°$

$0° < \widehat{C} < 90°$

Observação

No caso de os três ângulos serem congruentes, o triângulo passará a ser chamado *triângulo eqüiângulo*.

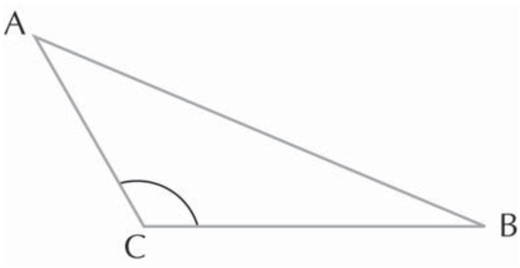


Retângulo: quando possui um ângulo reto.

Logo: $\widehat{C} = 90°$

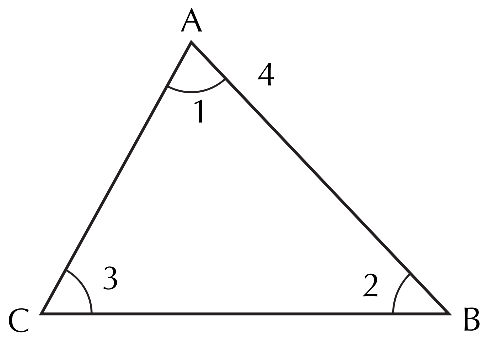
Obtusângulo: quando possui um ângulo obtuso.

Logo: $90° < \widehat{C} < 180°$



Soma dos ângulos internos de um triângulo

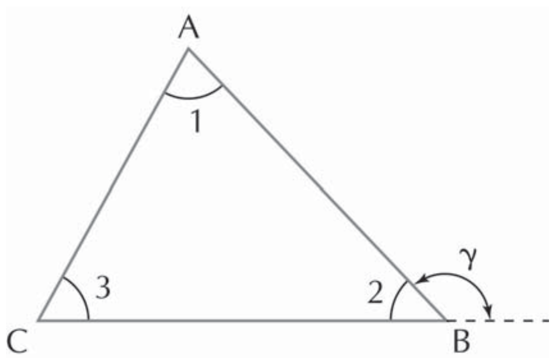
A soma da medida dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual à medida de um ângulo raso (ou dois ângulos retos).



Assim, no triângulo acima temos $\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} = 180°$.

Propriedade do ângulo externo a um triângulo

Em todo triângulo, qualquer ângulo externo tem por medida a soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes a ele.

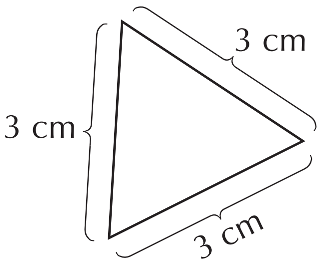


Assim, no triângulo acima temos que $\widehat{1} + \widehat{3} = \gamma$ ou ainda que $\widehat{2} + \gamma = 180°$.

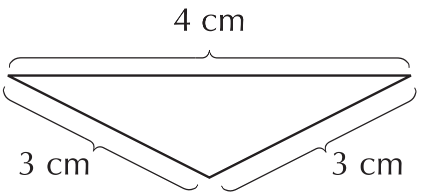
Exercícios

17. Classifique os triângulos a seguir como equilátero, isósceles ou escaleno.

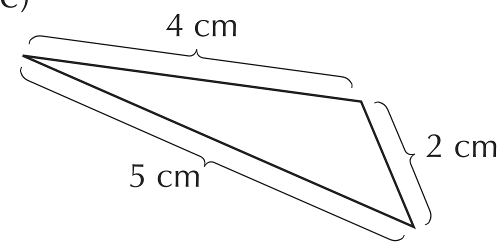
a)



b)

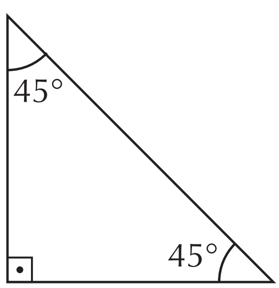


c)

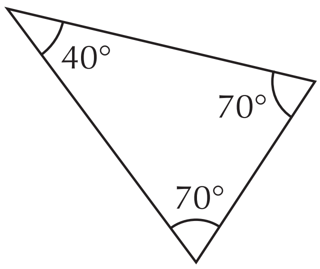


18. Classifique os triângulos a seguir como acutângulo, retângulo e obtusângulo.

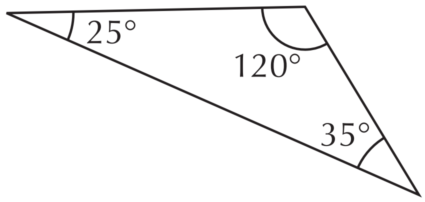
a)



b)

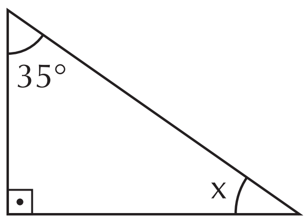


c)

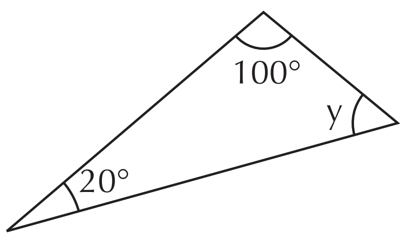


19. Calcule o valor do ângulo que falta nos triângulos a seguir; e classifique-os segundo seus ângulos:

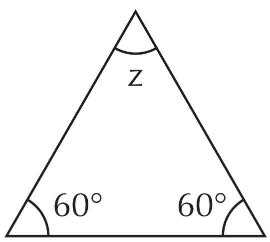
a)



b)

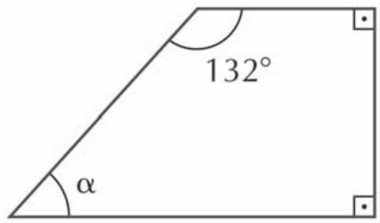


c)

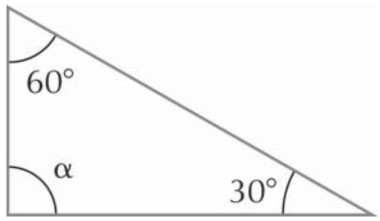


20. Calcule a medida do ângulo α nos seguintes casos:

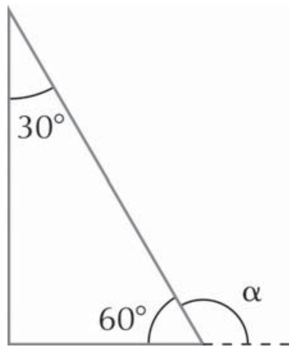
a)



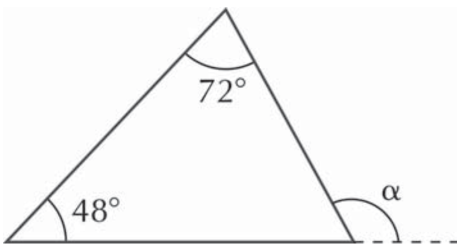
b)



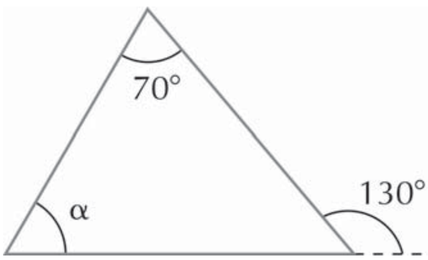
c)



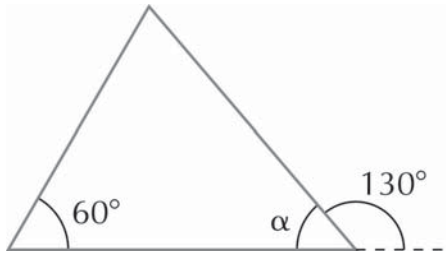
d)



e)



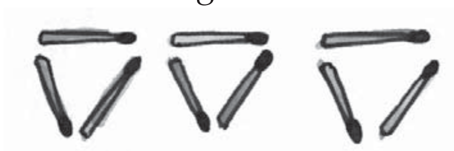
f)



Desafios

21. (Dica: antes de começar pegue alguns fósforos e siga as instruções.)

a) Mude a posição de três fósforos na configuração mostrada a seguir e obtenha 5 triângulos.



b) Junte 6 fósforos e forme 4 triângulos equiláteros.

c) Tire 4 fósforos e forme 4 triângulos equiláteros com a mesma área.



d) Junte mais três fósforos e forme 5 triângulos equiláteros.



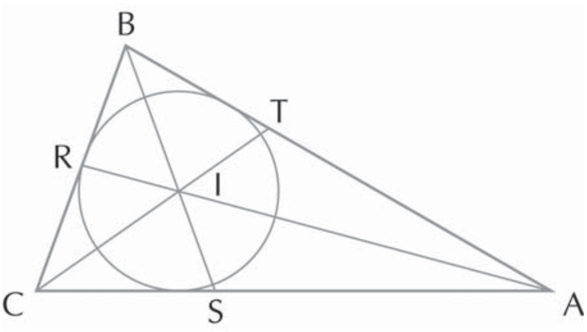
Fonte: *Clube de Matemática*.

Elementos principais do triângulo

I – *Bissetrizes de um triângulo*

Define-se como *bissetriz de um triângulo* o segmento de reta que, a partir do vértice, divide o ângulo ao meio e cujos extremos são o vértice e a intersecção da bissetriz com o lado oposto ao ângulo considerado (ou seus prolongamentos).

a) *Internas*



- três bissetrizes internas:

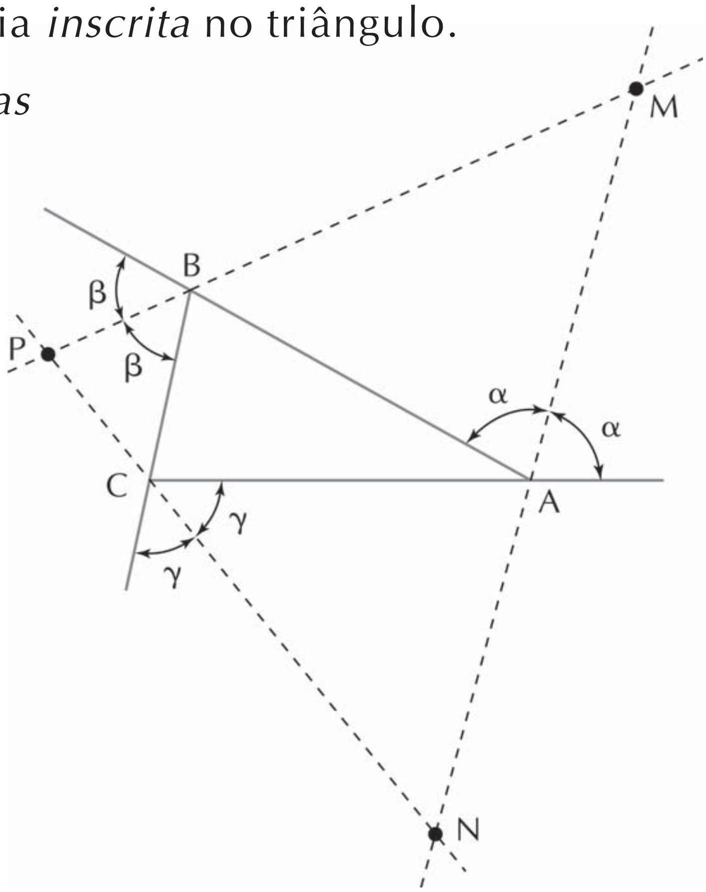
$\overline{AR}$ → bissetriz interna relativa ao ângulo $\widehat{A}$.

$\overline{BS}$ → bissetriz interna relativa ao ângulo $\widehat{B}$.

$\overline{CT}$ → bissetriz interna relativa ao ângulo $\widehat{C}$.

O ponto I é chamado de *incentro* do triângulo, centro da circunferência *inscrita* no triângulo.

b) *Externas*



- três bissetrizes externas:

  $\overline{AM} \rightarrow$ bissetriz externa relativa ao ângulo externo de $\widehat{A}$.

  $\overline{BP} \rightarrow$ bissetriz externa relativa ao ângulo externo de $\widehat{B}$.

  $\overline{CN} \rightarrow$ bissetriz externa relativa ao ângulo externo de $\widehat{C}$.

Os pontos *M*, *N* e *P* são chamados de *ex-incentro* do triângulo, centros das circunferências *ex-inscritas* ao triângulo.

II – *Mediatrizes de um triângulo*

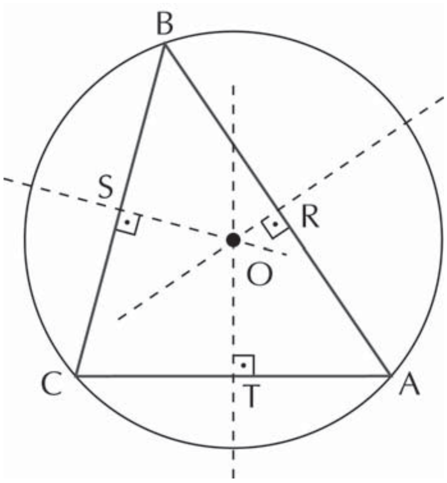
Define-se como *mediatriz* de um triângulo toda reta perpendicular ao ponto médio de um lado do triângulo.

Possui três *mediatrizes*:

$\overline{RO} \cong M_{AB} \rightarrow$ mediatriz relativa ao lado $\overline{AB}$.

$\overline{OS} \cong M_{BC} \rightarrow$ mediatriz relativa ao lado $\overline{BC}$.

$\overline{OT} \cong M_{AC} \rightarrow$ mediatriz relativa ao lado $\overline{AC}$.



O ponto *O* é chamado de *circuncentro* do triângulo, centro da circunferência *circunscrita* a ele.

III – *Medianas de um triângulo*

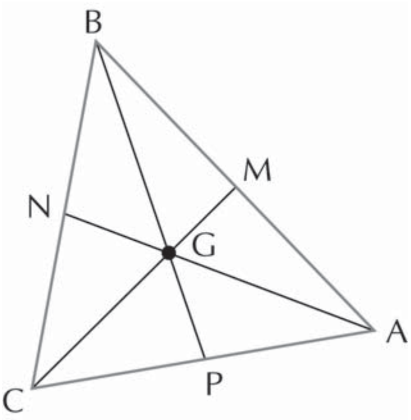
Define-se como *mediana* de um triângulo o segmento de reta que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto.

Possui três medianas:

$\overline{CM} \rightarrow$ mediana relativa ao lado $\overline{AB}$.

$\overline{AN} \rightarrow$ mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.

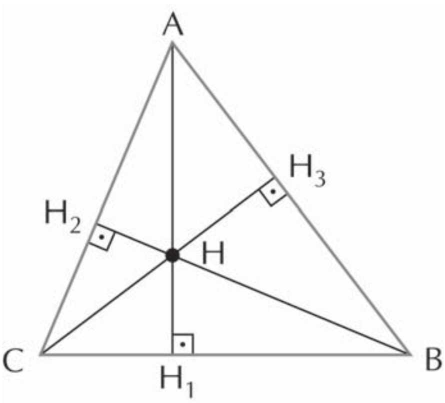
$\overline{BP} \rightarrow$ mediana relativa ao lado $\overline{CA}$.

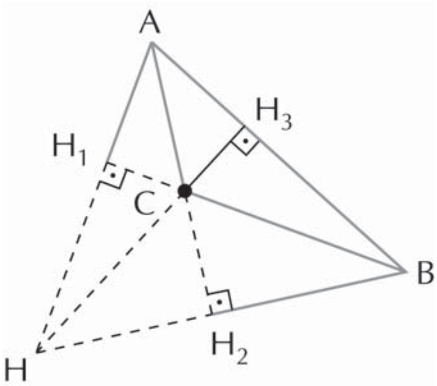


O ponto *G* é chamado de *baricentro* do triângulo, centro de gravidade dele.

IV – *Alturas de um triângulo*

Define-se como *altura* de um triângulo a medida do segmento de reta sobre a perpendicular traçada do vértice ao lado oposto (ou ao seu prolongamento).





Onde:

$\overline{AH_1} \cong h_1 \rightarrow$ altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

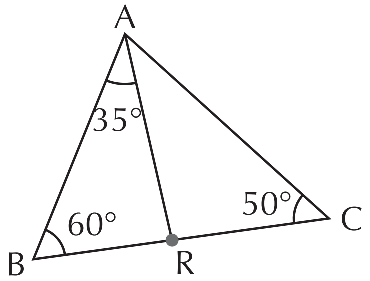
$\overline{BH_2} \cong h_2 \rightarrow$ altura relativa ao lado $\overline{AC}$.

$\overline{CH_3} \cong h_3 \rightarrow$ altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

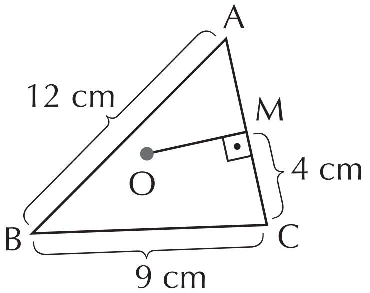
O ponto H é chamado de *ortocentro* do triângulo.

Exercícios

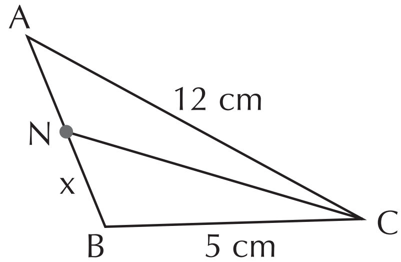
22. Se $\overline{AR}$ é bissetriz interna relativa ao ângulo $\hat{A}$ do triângulo a seguir, calcule o valor do ângulo $B\hat{A}C$.



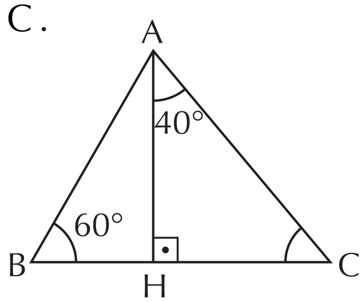
23. Seja $\overline{OH}$ a mediatriz referente ao lado $\overline{AC}$ do triângulo a seguir, calcule o seu perímetro.

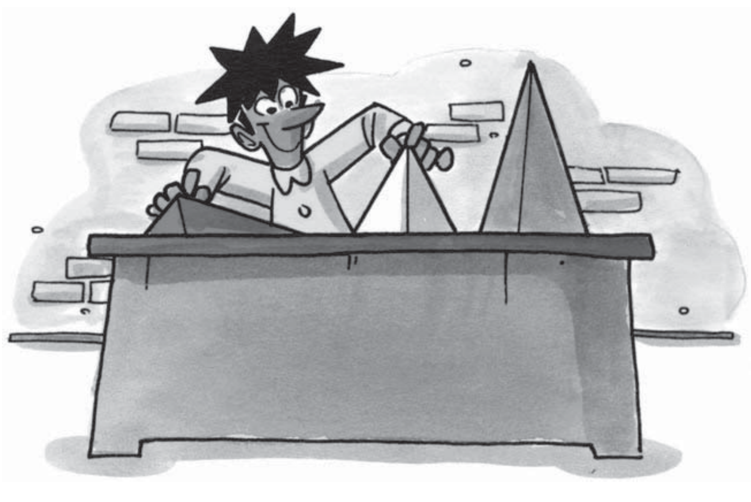


24. Se o perímetro do triângulo ABC é 25 cm e $\overline{CN}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$, calcule o valor de x da figura a seguir



25. Seja $\overline{AH}$ a altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$. Encontre a medida de $\hat{A}$ e de $\hat{C}$.





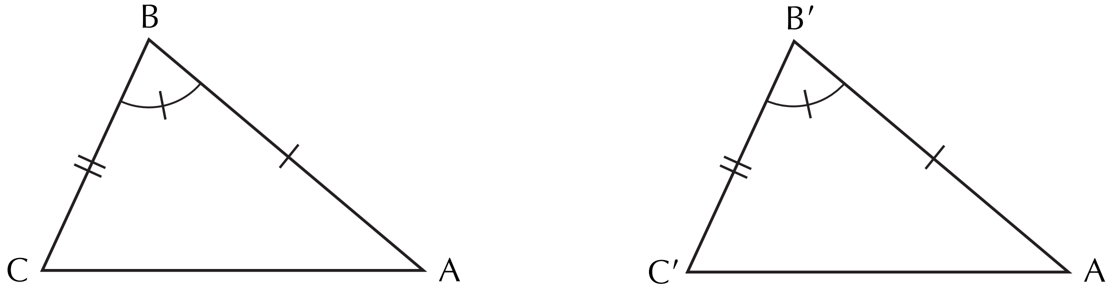
CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

São chamadas de *congruentes* as figuras cujos conjuntos de pontos, por intermédio de um movimento qualquer, coincidem.

Casos de congruência de triângulos

- *Primeiro caso*: Lado-Ângulo-Lado (L.A.L.)

Dois triângulos são congruentes quando possuem congruentes, respectivamente, as medidas de dois lados e a medida do ângulo por eles compreendido.

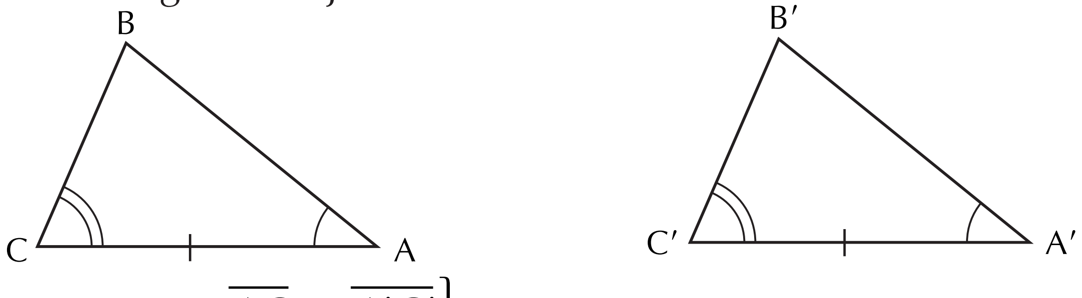


Os elementos congruentes, lado e ângulo, são marcados com o mesmo número de traços.

$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} \cong \overline{A'B'}\\ \hat{B} \cong \hat{B}'\\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}\end{array}\right\} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

- *Segundo caso*: Ângulo-Lado-Ângulo (A.L.A.)

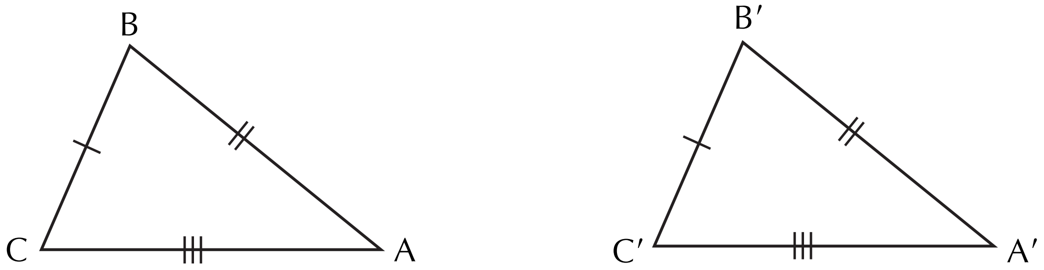
Dois triângulos são congruentes quando possuem congruentes, respectivamente, a medida de um lado e a medida dos dois ângulos adjacentes a ele.



$$\left.\begin{array}{r}\overline{AC} \cong \overline{A'C'}\\ \hat{A} \cong \hat{A}'\\ \hat{C} \cong \hat{C}'\end{array}\right\} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

- *Terceiro caso*: Lado-Lado-Lado (L. L. L.)

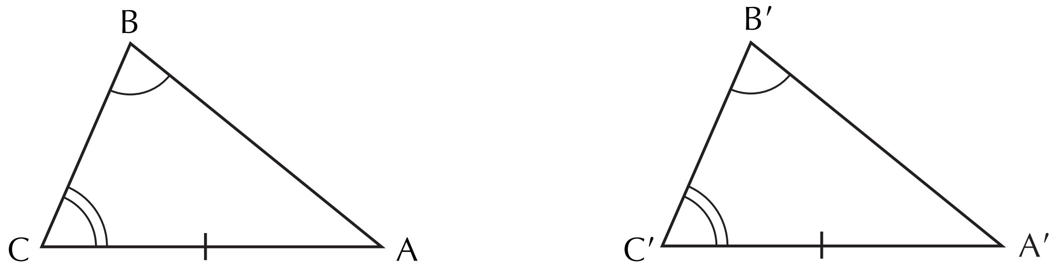
Dois triângulos são congruentes quando possuem as medidas congruentes dos três lados.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{A'B'}\\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}\\ \overline{CA} \cong \overline{C'A'}\end{array}\right\} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

- *Quarto caso*: Lado-Ângulo adjacente-Ângulo oposto ($L.A_a.A_o.$)

Dois triângulos são congruentes quando possuem congruentes, respectivamente, a medida de um lado, a medida de um ângulo adjacente a ele e a medida do ângulo a ele oposto.



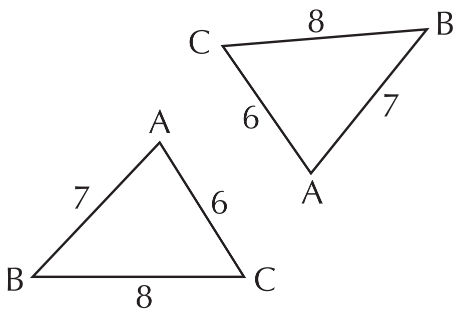
$$\left.\begin{array}{c}\overline{AC} \cong \overline{A'C'}\\ \hat{B} \cong \hat{B}'\\ \hat{C} \cong \hat{C}'\end{array}\right\} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$



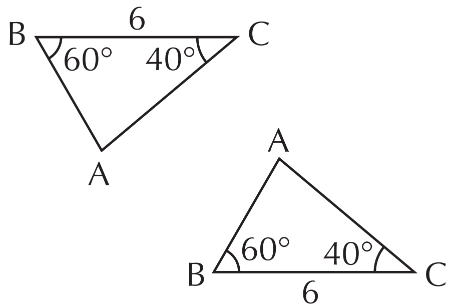
Exercícios

26. Nas figuras a seguir, os pares de triângulos são congruentes. Identifique os casos de congruência.

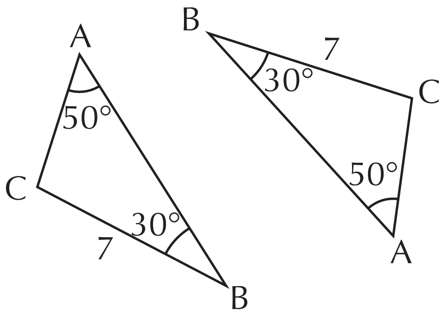
a)



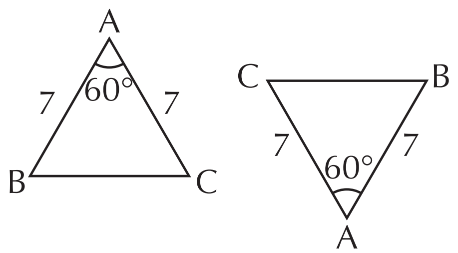
b)



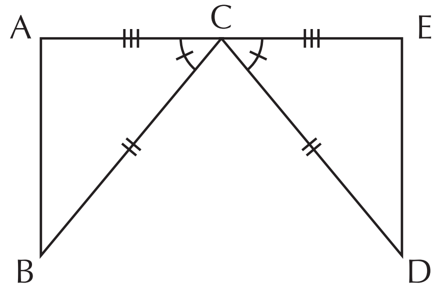
c)



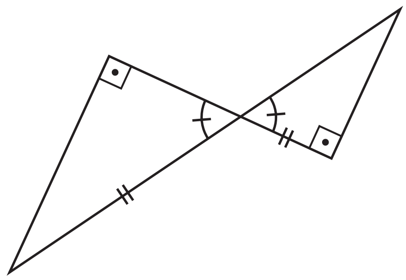
d)



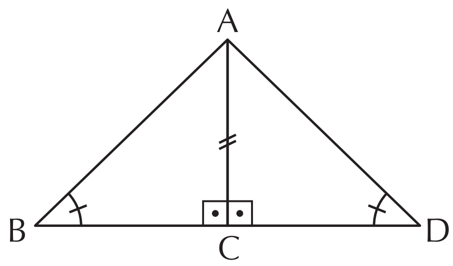
e)



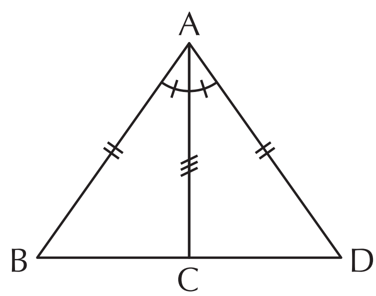
f)



g)



h)

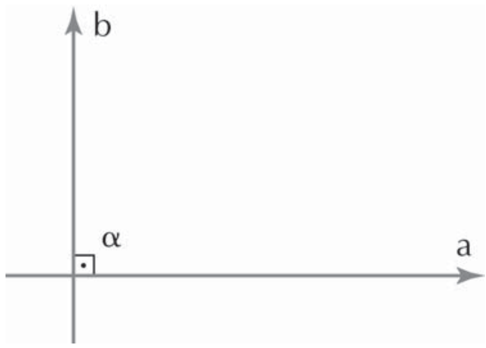




PERPENDICULARISMO

Perpendiculares

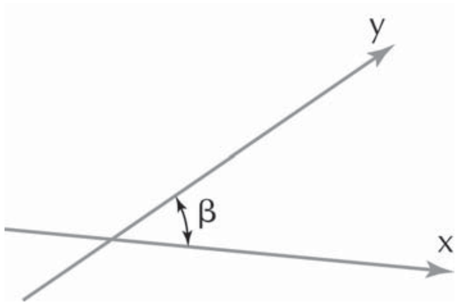
Duas retas são perpendiculares quando um dos ângulos por elas formado for reto. Assim, as retas *a* e *b* são perpendiculares, pois: $\alpha \cong 90°$, e indica-se $a \perp b \leftrightarrow b \perp a$ ($\alpha \cong 90°$).



Oblíquas

Em caso contrário, se um dos ângulos não for reto então elas são ditas *oblíquas*. É o caso das retas *x* e *y* da figura ao lado, e indica-se por:

$x \not\perp y \leftrightarrow y \not\perp x$ ($0° < \beta < 90°$).



PARALELISMO

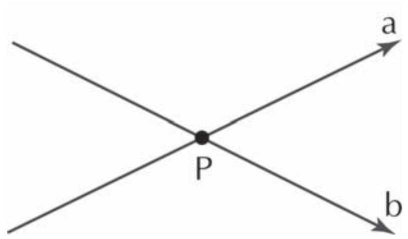
Retas paralelas

Duas retas são paralelas quando não possuem ponto em comum, ou seja: $a \cap b = \emptyset$ e indica-se: $a \,//\, b$.



Retas concorrentes

Duas retas são concorrentes quando possuem ponto em comum, ou seja: $a \cap b = \{P\}$.

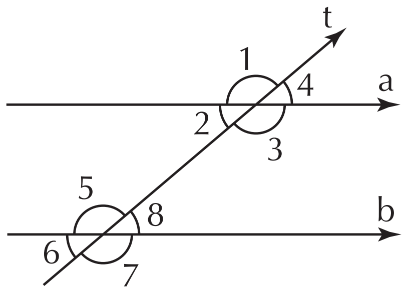


ÂNGULOS FORMADOS POR DUAS RETAS PARALELAS

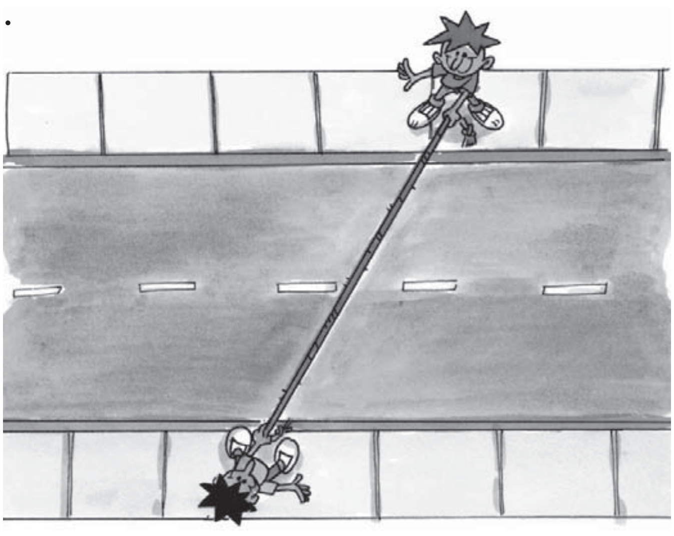
Sejam as retas *a* e *b* paralelas interceptadas por uma reta *t* (transversal), determinando oito ângulos, assim chamados:

Correspondentes

Quando um deles é interno e o outro externo, situados no mesmo semiplano com relação à transversal *t*.



Assim, temos: $\widehat{1}$ e $\widehat{5}$; $\widehat{2}$ e $\widehat{6}$; $\widehat{3}$ e $\widehat{7}$; $\widehat{4}$ e $\widehat{8}$.



Alternos internos

Ambos são internos e não-adjacentes, situados em semiplanos opostos em relação à transversal *t*.

Assim, temos: $\widehat{1}$ e $\widehat{8}$, $\widehat{3}$ e $\widehat{5}$.

Alternos externos

Ambos são externos e não-adjacentes, situados em semiplanos opostos em relação à transversal *t*.

Assim, temos: $\widehat{1}$ e $\widehat{7}$, $\widehat{4}$ e $\widehat{6}$.



Colaterais internos

Ambos são internos e situados no mesmo semiplano em relação à transversal *t*.

Assim, temos: $\widehat{2}$ e $\widehat{5}$, $\widehat{3}$ e $\widehat{8}$.

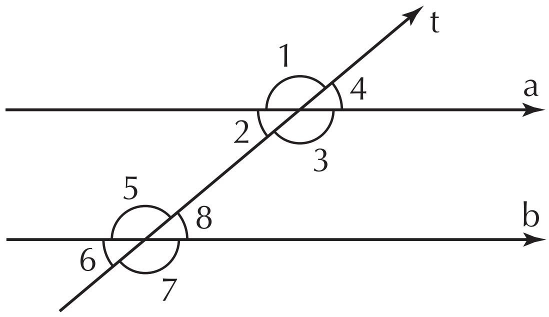
Colaterais externos

Ambos são externos e situados no mesmo semiplano em relação à transversal.

Assim, temos: $\widehat{1}$ e $\widehat{6}$, $\widehat{4}$ e $\widehat{7}$.

RELAÇÕES DE CONGRUÊNCIA ENTRE OS ÂNGULOS FORMADOS POR DUAS RETAS PARALELAS E UMA TRANSVERSAL

Se medirmos e compormos os ângulos definidos por duas retas paralelas e uma transversal, poderemos chegar às seguintes relações de congruência:



1. *Todos os ângulos agudos são congruentes entre si.*
São eles divididos por tipos:

a) oposto pelo vértice

$\widehat{2} \cong \widehat{4}$

$\widehat{6} \cong \widehat{8}$

b) correspondentes

$\widehat{2} \cong \widehat{6}$

$\widehat{4} \cong \widehat{8}$

c) alternos internos

$\widehat{2} \cong \widehat{8}$

d) alternos externos

$\widehat{4} \cong \widehat{6}$

2. *Todos os ângulos obtusos são congruentes entre si.*
São eles divididos por tipos:

a) opostos pelo vértice

$\widehat{1} \cong \widehat{3}$

$\widehat{5} \cong \widehat{7}$

b) correspondentes

$\widehat{1} \cong \widehat{5}$

$\widehat{3} \cong \widehat{7}$

c) alternos internos

$\widehat{3} \cong \widehat{5}$

d) alternos externos

$\widehat{1} \cong \widehat{7}$

3. *A soma de dois ângulos em que um é agudo e o outro obtuso é 180°* (são suplementares).

$\widehat{1} + \widehat{4} = 180°$ $\quad$ $\widehat{5} + \widehat{8} = 180°$

$\widehat{2} + \widehat{3} = 180°$ $\quad$ $\widehat{6} + \widehat{7} = 180°$

$\widehat{1} + \widehat{2} = 180°$ $\quad$ $\widehat{5} + \widehat{6} = 180°$

$\widehat{3} + \widehat{4} = 180°$ $\quad$ $\widehat{7} + \widehat{8} = 180°$

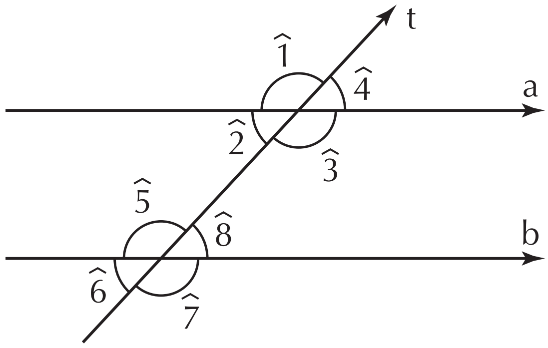
Observação

$$\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} + \widehat{4} = 360°$$

$$\widehat{5} + \widehat{6} + \widehat{7} + \widehat{8} = 360°$$

Exemplo 1

Na figura a seguir determine a medida dos ângulos sabendo-se que $\hat{5} = 105°$.



Solução

Se $\hat{5} = 105°$, o ângulo $\hat{7}$ que é oposto pelo vértice com $\hat{5}$ é igual a 105°.

Portanto $\boxed{\hat{7} = 105°}$.

Como $\hat{1}$ é correspondente a $\hat{5} \rightarrow \boxed{\hat{1} = 105°}$

Pelo fato de $\hat{3}$ ser alterno interno a $\hat{5} \rightarrow \boxed{\hat{3} = 105°}$

Agora, como $\hat{5}$ e $\hat{8}$ são suplementares, temos que

$\hat{5} + \hat{8} = 180°$

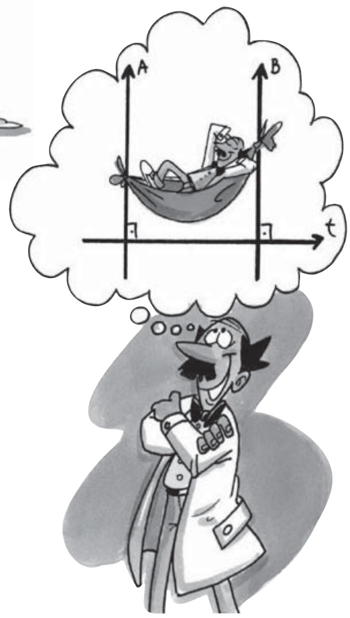


Mas $\hat{5} = 105°$ então

$\hat{5} + \hat{8} = 180°$

$\hat{8} = 180° - 105°$

$\boxed{\hat{8} = 75°}$



Como $\hat{4}$ é correspondente a

$\hat{8} \rightarrow \boxed{\hat{4} = 75°}$

Pelo fato de $\hat{2}$ ser alterno interno a

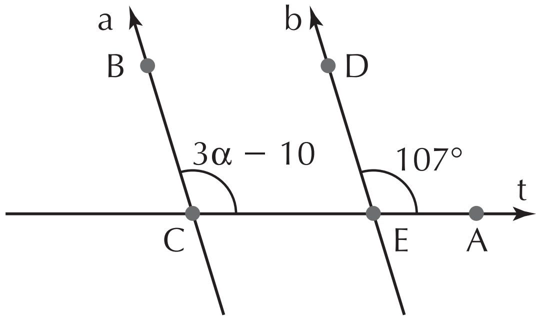
$\hat{8} \rightarrow \boxed{\hat{2} = 75°}$

E ainda como $\hat{8}$ é oposto pelo vértice com $\hat{6}$ então $\boxed{\hat{6} = 75°}$

Exemplo 2

Calcule o valor de a.

a)



Solução

Como os ângulos $B\widehat{C}E$ e $D\widehat{E}A$ são correspondentes, temos que:

$$B\widehat{C}E \cong D\widehat{E}A$$

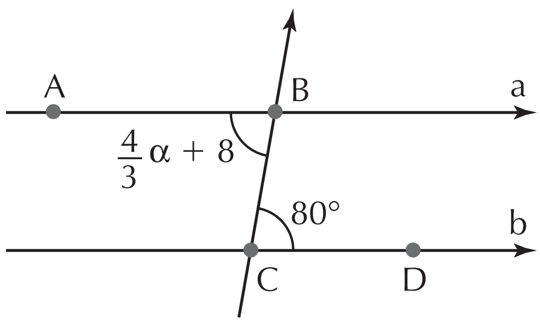
Assim

$3\alpha - 10 = 107$

$3\alpha = 117$

$\alpha = \dfrac{117}{3} \rightarrow \boxed{\alpha = 39°}$

b)



Solução

Como os ângulos $A\widehat{B}C$ e $B\widehat{C}D$ são alternos internos então:

$\dfrac{4\alpha}{3} + 8 = 80$

$4\alpha + 24 = 80 \times 3$

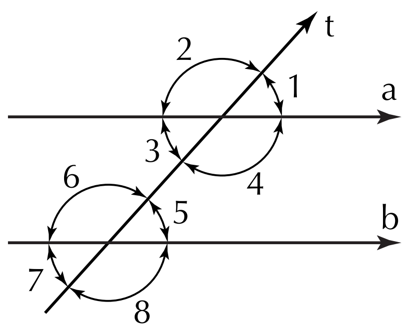
$4\alpha = 240 - 24$

$4\alpha = 216 \rightarrow \boxed{\alpha = 54°}$

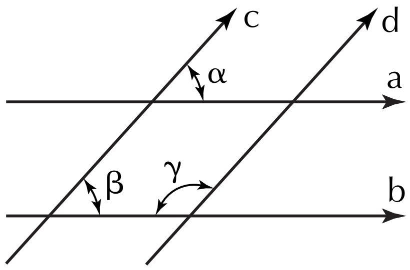
Exercícios

27. Na figura ao lado, determine os valores das medidas dos ângulos, sabendo-se que:

$$\widehat{6} = 132° \text{ e } a \,//\, b$$

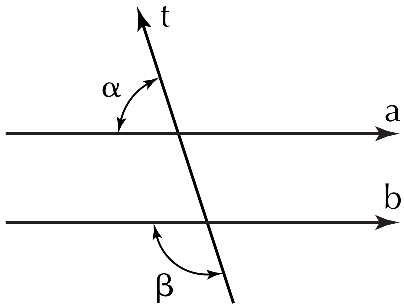


28. Na figura abaixo, determine os valores das medidas dos ângulos β e γ, dado α = 42°.
a // b e *c // d*

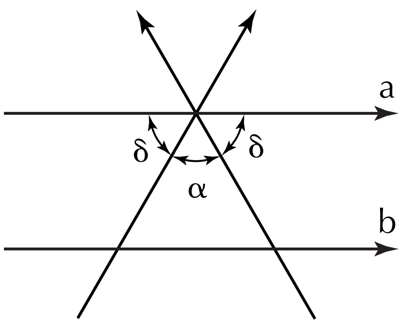


29. Nas figuras a seguir, determine o valor do ângulo α em cada caso:

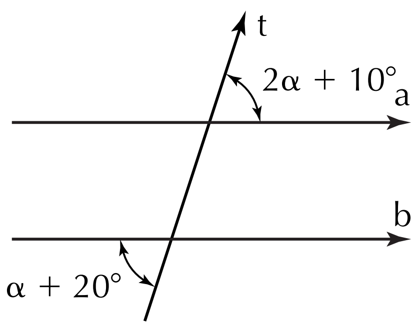
a) *a // b*; β = 108°



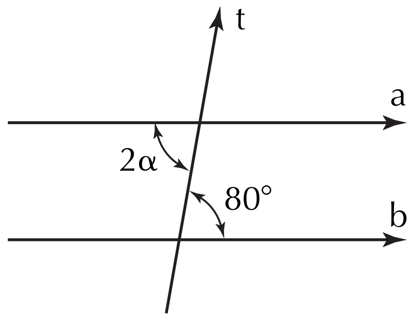
b) *a // b*; δ = 60°



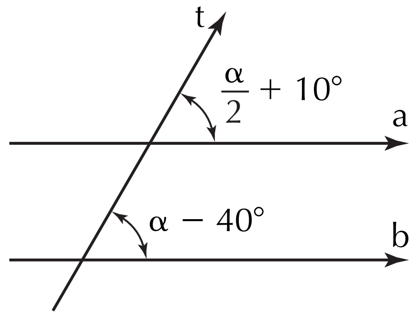
c)



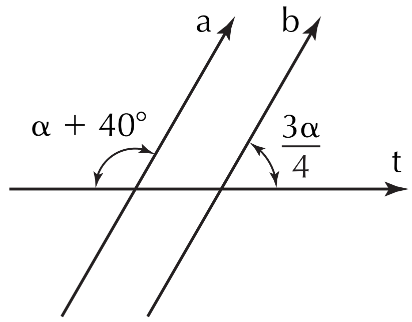
d)



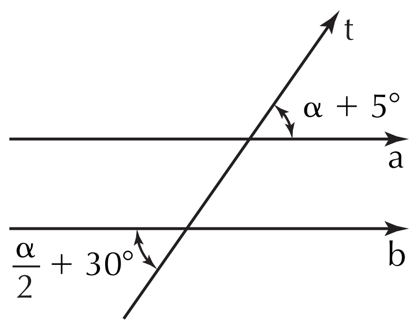
e)



f)



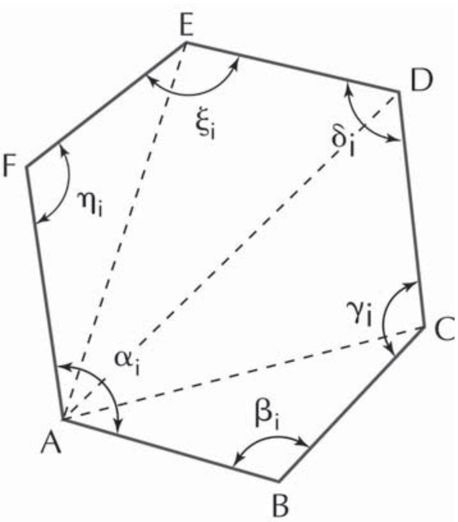
g)





SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO DE *n* LADOS (S_i)

Observemos a figura a seguir.



Pelo vértice *A* traçamos as possíveis diagonais para o polígono considerado. No nosso caso, temos $n = 6$ lados, e obtivemos quatro triângulos. Logo, o número de triângulos é $(n - 2)$. Mas como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então, para um polígono convexo, temos:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Caso do polígono convexo regular

Como em um polígono regular $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong ... \cong \overline{FA}$, então $\alpha_1 \cong \beta_1 \cong \gamma_1 \cong ... \cong \eta_1$. Assim, cada ângulo interno do polígono vale:

$$\alpha_i = \frac{S_i}{n}$$

SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO DE *n* LADOS (S_e)

A soma da medida dos ângulos externos (S_e) de um polígono convexo de *n* lados é constante e igual a 360°.

Os ângulos interno e externo em relação a um mesmo vértice são adjacentes e somam 180°, então:

$(\alpha_i + \alpha_e) + (\beta_i + \beta_e) + (\gamma_i + \gamma_e) + \ldots + (\eta_i + \eta_e) = n \cdot 180°$

desenvolvendo, obtemos:

$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \ldots + \eta_i + \alpha_e + \beta_e + \ldots + \eta_e = n \cdot 180°$

ou: $S_i + S_e = n \cdot 180°$

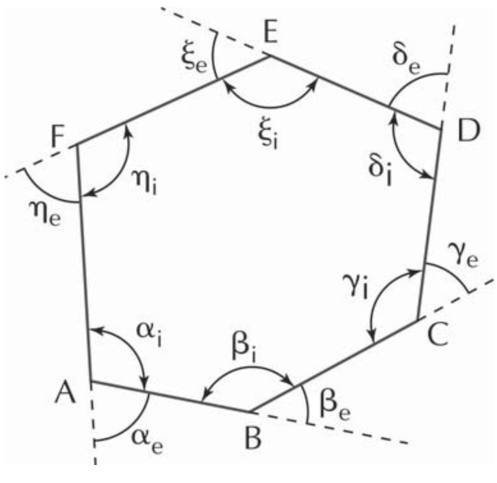
$$S_e = n \cdot 180° - S_i$$

$$S_e = n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° = 360°$$

$$S_e = 360°$$

Observemos a figura a seguir, que ilustra essa afirmação.





Caso do polígono convexo regular

Como em um polígono regular $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong ... \cong \overline{FA}$, então $\alpha_e \cong \beta_e \cong \gamma_e \cong ... \cong \eta_e$. Assim, cada ângulo externo do polígono vale:

$$\alpha_e = \frac{S_e}{n}$$

Exemplo

É dado um polígono regular convexo de $n = 8$ lados. Calcule S_i, α_i, S_e, α_e.

Solução

a) Cálculo de S_i:

$S_i = (n - 2) \cdot 180 \rightarrow$
$\rightarrow S_i = (8 - 2) \cdot 180° = 6 \cdot 180° = 1.080°$



b) Cálculo de α_i:

$$\alpha_i = \frac{S_i}{n} \rightarrow \alpha_i = \frac{1.080°}{8} = 135°$$

c) Cálculo de S_e:

$S_e = 360°$

d) Cálculo de α_e:

$$\alpha_e = \frac{360°}{n} \rightarrow \alpha_e = \frac{360°}{8} = 45°$$

Logo: $S_i = 1.080°$, $\alpha_i = 135°$, $S_e = 360°$, $\alpha_e = 45°$.

Exercícios

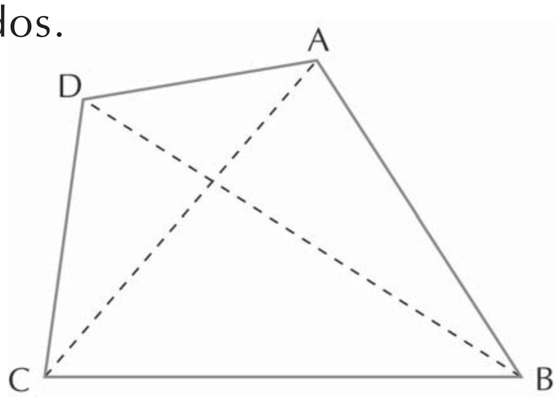
30. Calcule a soma dos ângulos internos (S_i) dos seguintes polígonos convexos de n lados:
    a) $n = 3$
    b) $n = 4$
    c) $n = 5$
    d) $n = 6$
    e) $n = 9$
    f) $n = 10$
    g) $n = 12$
    h) $n = 15$

31. Retome o exercício anterior e considerando em cada caso o polígono convexo e regular, calcule os ângulos interno (α_i) e externo (α_e).

QUADRILÁTEROS CONVEXOS



Define-se como quadrilátero todo polígono que possui quatro lados.



Elementos principais

- quatro ângulos internos: $\widehat{A}$; $\widehat{B}$; $\widehat{C}$; $\widehat{D}$
- duas diagonais: $\overline{AC}$; $\overline{BD}$
- os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, assim como *BC* e $\overline{AD}$ são chamados de *lados opostos*.

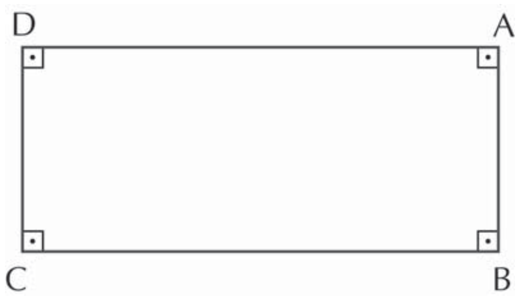
PARALELOGRAMO

É o quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.

Classificação

Retângulo: paralelogramo cujos ângulos são congruentes e os lados opostos, congruentes entre si.

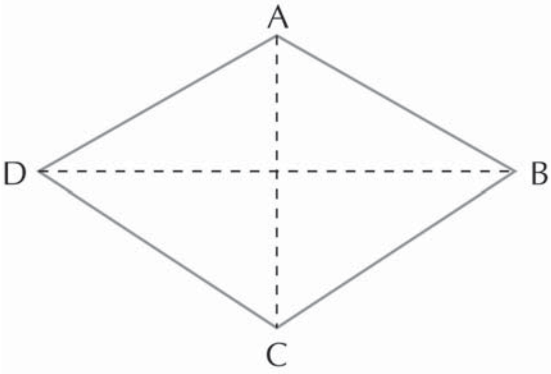




Logo: $\widehat{A} \cong \widehat{B} \cong \widehat{C} \cong \widehat{D} = 90°$

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

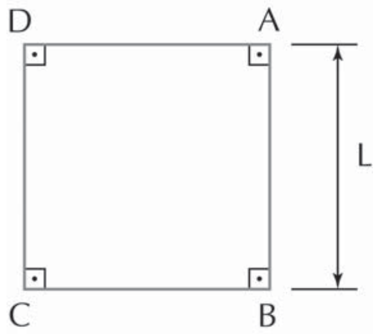
Losango: paralelogramo cujos lados são congruentes e os ângulos opostos, congruentes entre si.



Logo: $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

$\widehat{A} \cong \widehat{C}$ e $\widehat{B} \cong \widehat{D}$

Quadrado: paralelogramo cujos ângulos são congruentes e os lados também são.



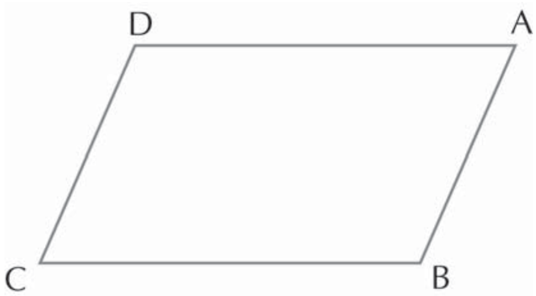
Logo: $\widehat{A} \cong \widehat{B} \cong \widehat{C} \cong \widehat{D} = 90°$

$\overline{BC} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD} \cong L$

Propriedades dos paralelogramos

São válidas as seguintes propriedades para os paralelogramos:

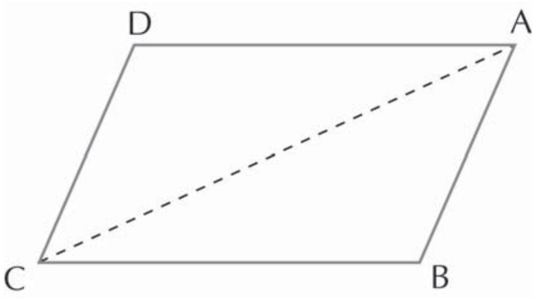
1. *Os lados opostos são congruentes*; portanto na figura a seguir:



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{BC} \cong \overline{AD}$

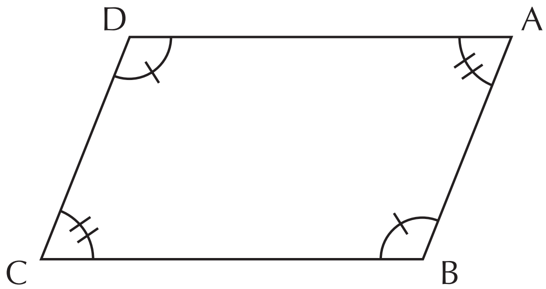


2. *Cada diagonal do paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes*; portanto na figura a seguir:



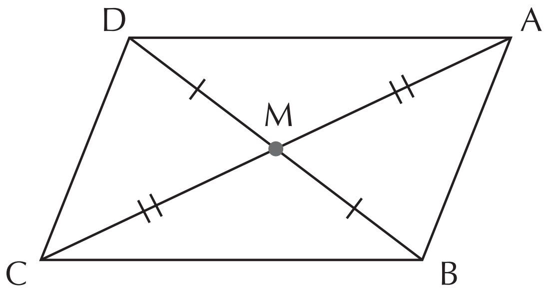
$\triangle ABC \cong \triangle ACD$

3. *Os ângulos opostos são congruentes*; assim na figura a seguir:



$C\widehat{D}A \cong A\widehat{B}C$ e $D\widehat{C}B \cong B\widehat{A}D$

4. *As diagonais interceptam-se no ponto médio*; portanto, na figura a seguir:

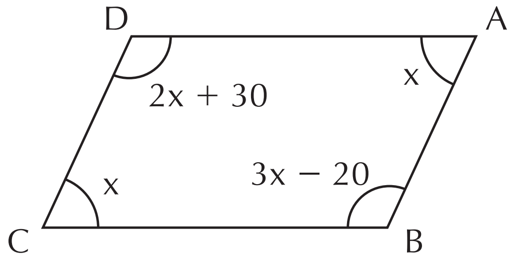


$\overline{DM} \cong \overline{MB}$ e $\overline{CM} \cong \overline{MA}$

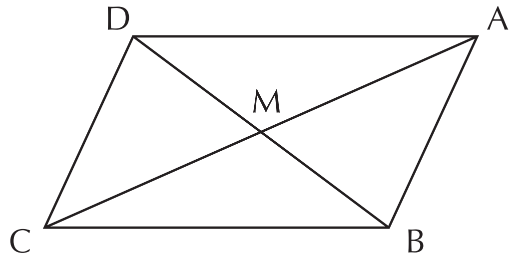


Exercícios

32. Dado o paralelogramo a seguir, encontre o valor de *x* e as medidas dos ângulos.



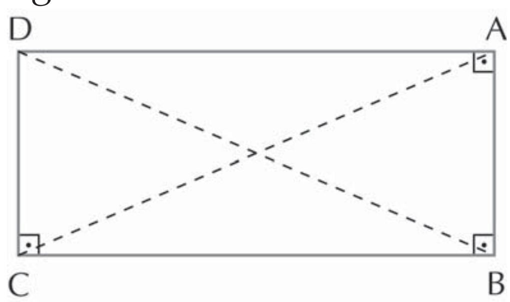
33. Dado o paralelogramo a seguir, determine o comprimento das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.



Dados: $AM = 7$ cm e $DM = 5$ cm

Propriedades dos retângulos

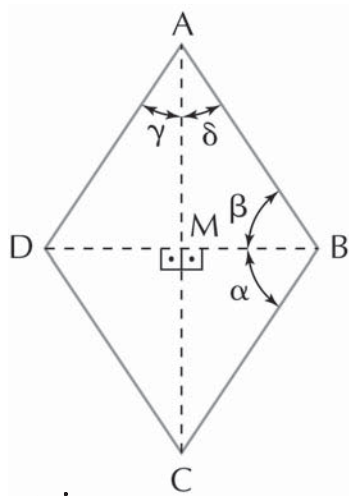
As diagonais de um retângulo são congruentes; portanto na figura a seguir temos:

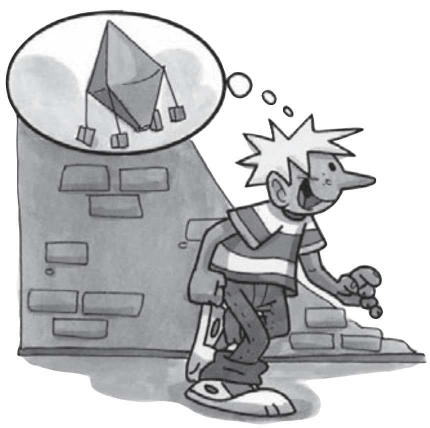


$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Propriedades dos losangos

As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e bissetrizes internas dos ângulos do losango; assim na figura a seguir temos:



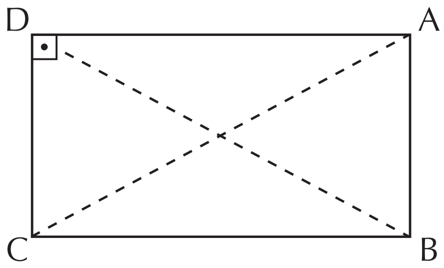


$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são bissetrizes internas com $\gamma \cong \delta$ e $\alpha \cong \beta$.

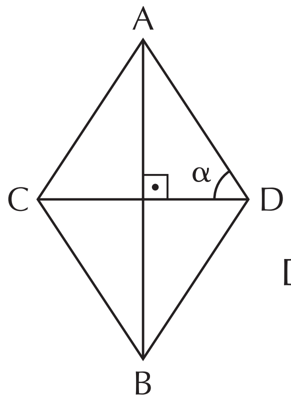
Exercícios

34. Dado o retângulo a seguir, determine o comprimento de suas diagonais.



Dados: BC = 4 cm
e AB = 3 cm

35. Dado o losango a seguir, determine a medida de $\widehat{A}$.



Dado: $\alpha = 60°$

TRAPÉZIO



É o quadrilátero que *apenas possui* dois lados paralelos (chamados de bases).

$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D} \rightarrow$ ângulos internos do trapézio

$\overline{AD}$ → base menor

$\overline{BC}$ → base maior

$\overline{MN}$ → base média

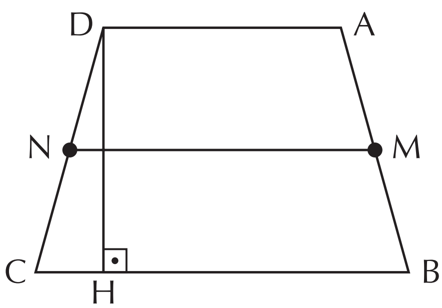
$\overline{DH}$ → altura do trapézio (h)

Classificação

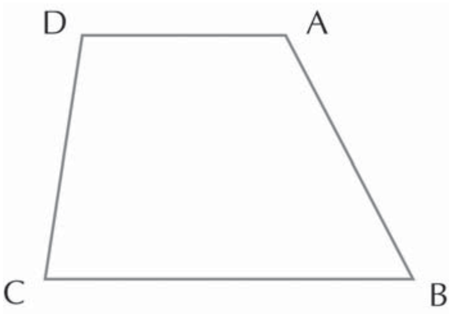
Os trapézios são classificados em:

Isósceles: quando os lados não-paralelos forem congruentes.

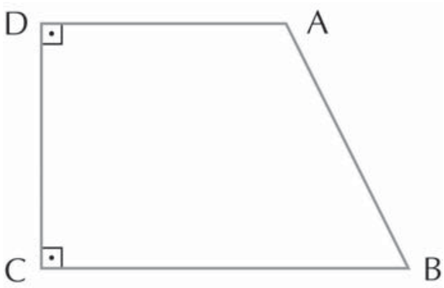
Logo: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



Escaleno: quando os lados não-paralelos não forem congruentes.



Retângulo: quando um dos ângulos internos for reto.

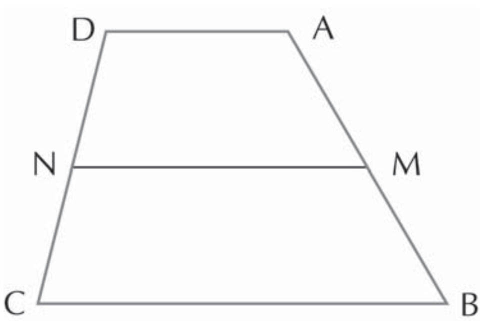


$$\widehat{C} \cong \widehat{D} = 90°$$

Propriedade dos trapézios

O segmento de reta que tem por extremos os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo à base e tem por medida a soma das medidas das bases dividida por dois.

Assim na figura a seguir:



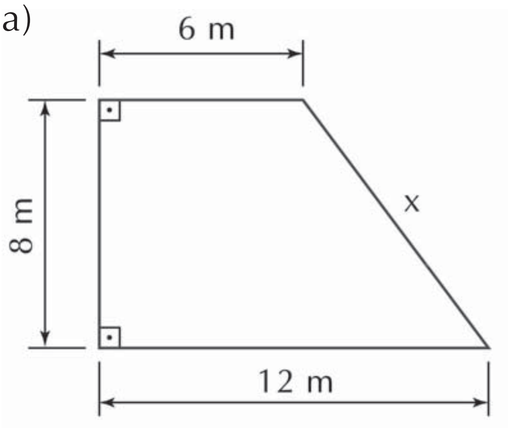


$$\overline{MN} \mathbin{//} \overline{CB} \mathbin{//} \overline{AD} \text{ e } \overline{MN} \cong \frac{\overline{AD} + \overline{CB}}{2}$$

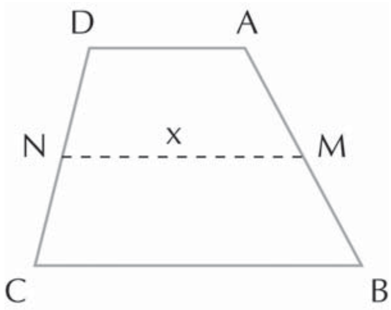
Exercício

36. Calcule a medida do segmento x, nas figuras abaixo:

a)



b)



$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ $\quad AD = 6$ cm

$\overline{AN} \cong \overline{NB}$ $\quad BC = 8$ cm

$\overline{MN} \cong x$

Desafios

37. (**Dica**: antes de começar, pegue alguns palitos de fósforo e siga as instruções.)

a) Junte 24 fósforos e forme 5 quadrados.

b) Junte 24 fósforos e forme 20 quadrados.

c) Mude a posição de 3 fósforos e obtenha 3 quadrados de mesma área.



d) Mude a posição de 5 fósforos e obtenha uma figura formada por 3 quadrados.



e) Tire dois palitos de fósforo deixando dois quadrados



f) Tire 3 fósforos deixando 6 triângulos e 3 losangos.



Fonte: *Clube de Matemática*.

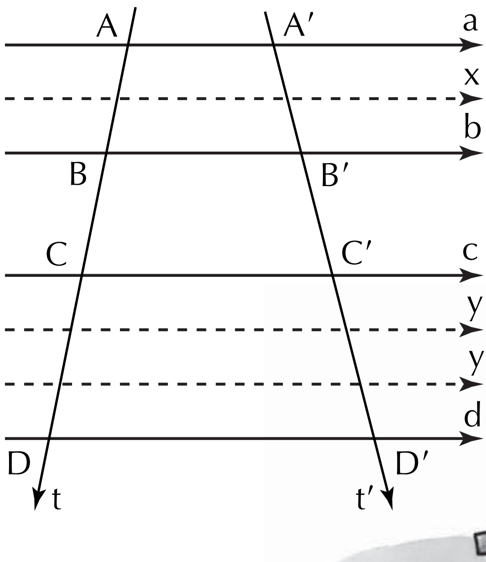
Teorema de Tales

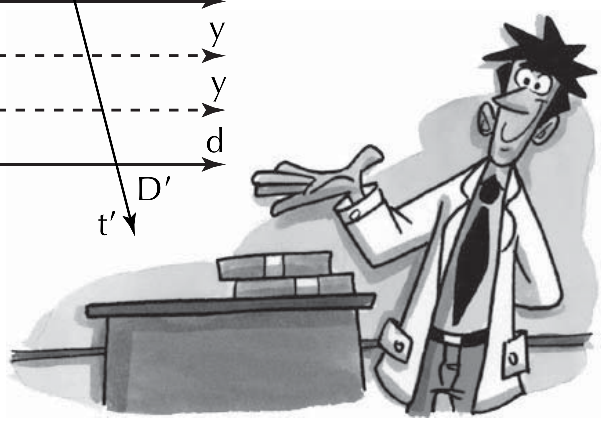
Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais quaisquer segmentos proporcionais.

De acordo com a figura a seguir, temos:

Sendo a // b // c // d e t e t′ transversais, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \cong \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$





Tales

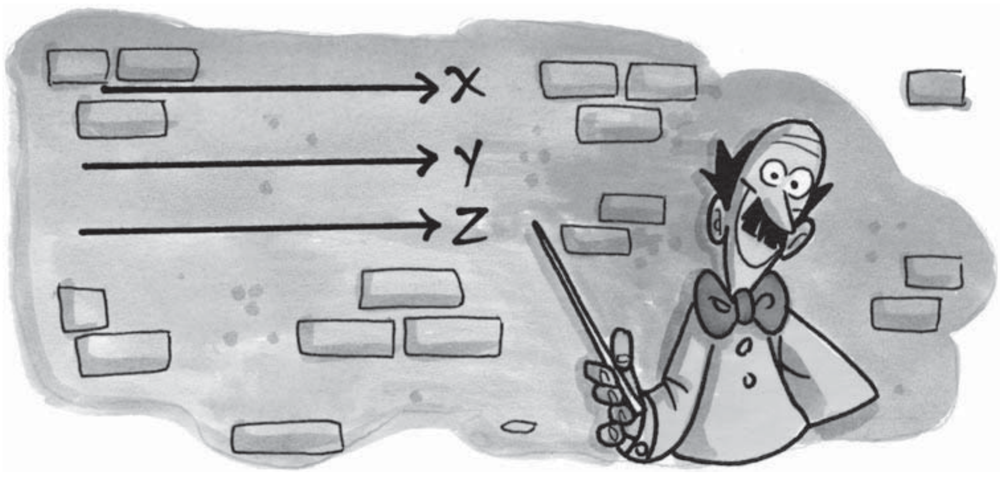
Filosófo grego (625 a.C −546 a.C)

Tales é considerado um dos precursores da ciência, pois substituiu explicações míticas sobre o universo por explicações físicas.

Consta que Tales teria conseguido medir a altura de uma pirâmide egípcia comparando a sombra por ela projetada com a de uma haste vertical.

Aplicou assim o princípio da semelhança de triângulos.

Tales foi o primeiro a afirmar que a Lua seria iluminada pela luz solar, o que permitiria explicar os eclipses lunares. Conta-se que ele utilizou uma de suas previsões de eclipse para atemorizar os exercítos em guerra fazendo-os suspender uma batalha e firmar um acordo de paz.

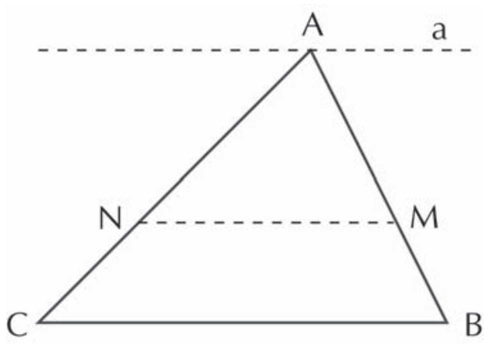


LINHAS PROPORCIONAIS NOS TRIÂNGULOS

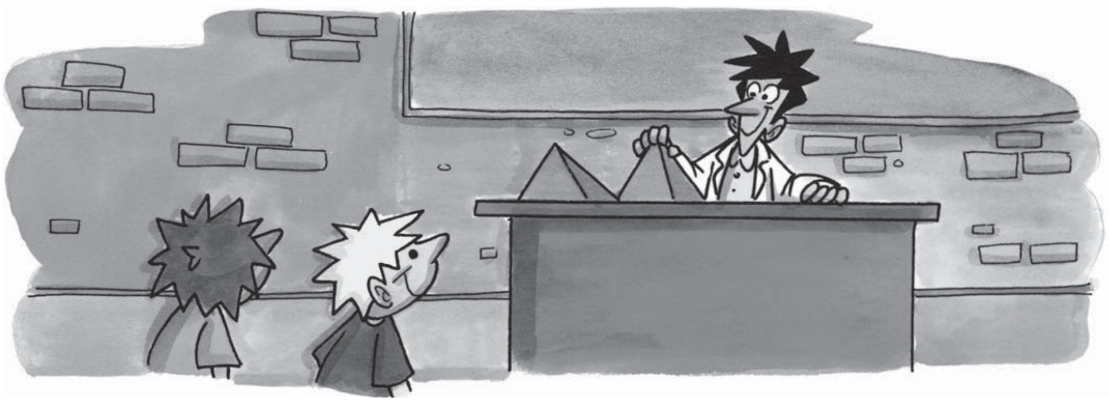
Teorema

Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo determina sobre os outros dois lados (ou sobre seus prolongamentos)

segmentos proporcionais. Na figura a seguir, podemos concluir, pelo Teorema de Tales, que:



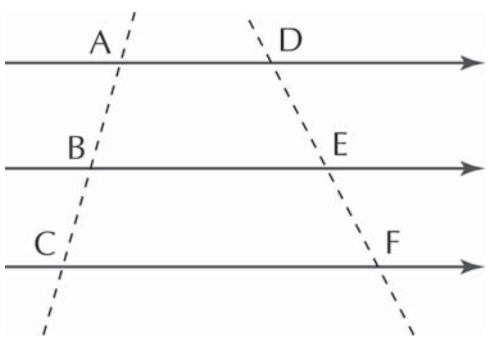
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cong \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}$$



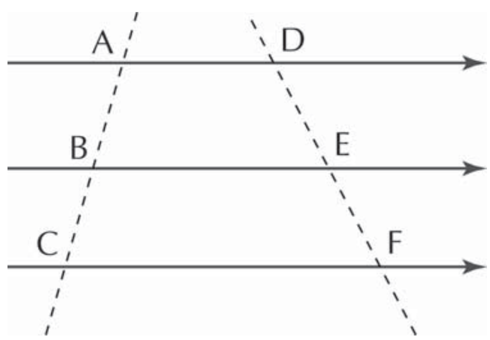
Exercícios

38. Determine a medida de x, em cada um dos casos:

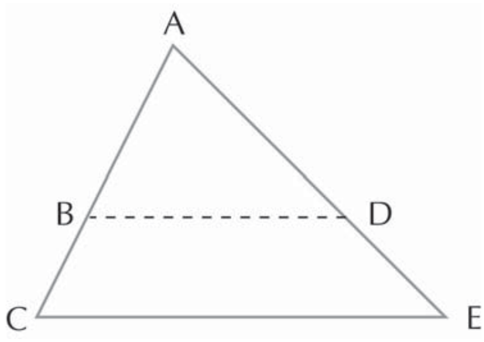
a) $AB = BC = 6$ m
$DE = 8$ m
$EF = x$

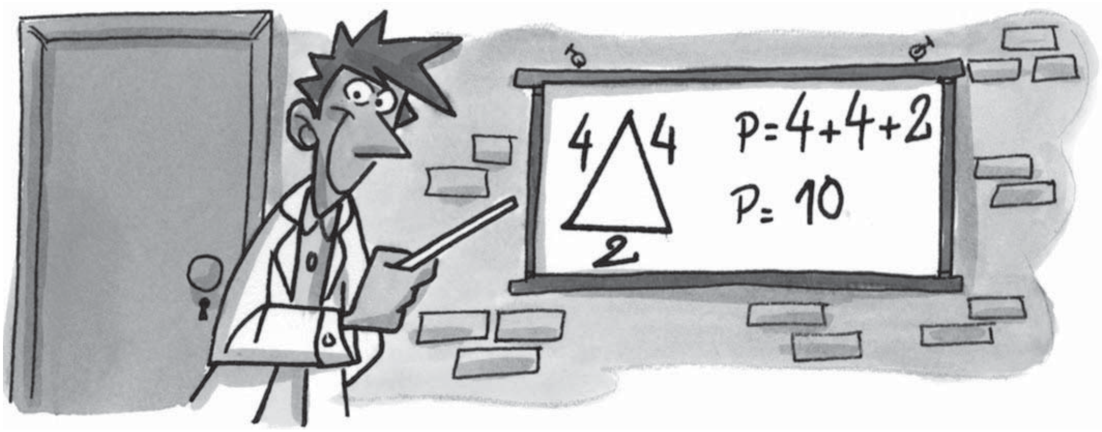


b) $AB = 3$ cm
$BC = 4$ cm
$DE = 6$ cm
$EF = x$



c) $AB = 4$ km
$BC = 3$ km
$AD = 12$ km
$AE = x$

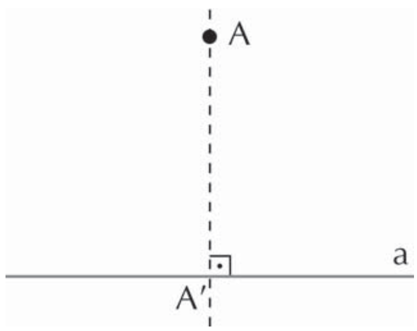




RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Projeção ortogonal de um ponto A sobre uma reta *a*.

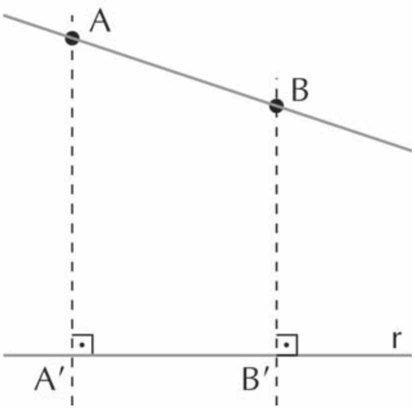
Entende-se por projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta o pé da perpendicular traçada desse ponto à reta considerada.



Assim teríamos: A' é a projeção ortogonal do ponto A sobre a reta a.

Projeção ortogonal de um segmento de reta sobre uma reta *r*

Para projetarmos um segmento de reta, basta projetarmos os seus pontos extremos. Assim, temos:

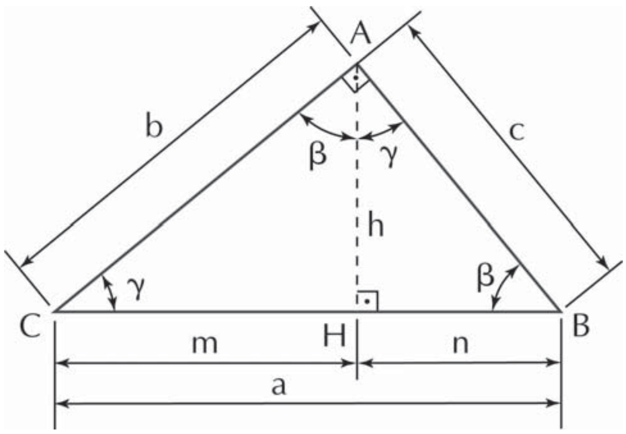


$\text{proj}_r\ \overline{AB} \cong \overline{A'B'}$



Relações métricas no triângulo retângulo

Seja o triângulo *ABC* retângulo em *A* ($\widehat{A} \cong 90°$), conforme a figura a seguir:



Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são chamados de *catetos adjacentes ao* ângulo reto. O lado $\overline{BC}$ é chamado de *cateto oposto* ao ângulo reto é chamado de *hipotenusa*.

Primeira relação: A medida de qualquer cateto é a média geométrica entre as medidas da hipotenusa e sua projeção sobre ela.

Considerando o $\triangle ABC$, obtemos:

$\triangle ABC \sim \triangle AHB$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cong \frac{\overline{AB}}{\overline{HB}}$$

ou: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{n}$

Logo: $c^2 = a \cdot n$

$\triangle ABC \sim \triangle AHC$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cong \frac{\overline{AC}}{\overline{HC}}$$

ou: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{m}$

Logo: $b^2 = a \cdot m$

Segunda relação: A medida da altura num triângulo retângulo é a média geométrica entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Considerando o $\triangle ABC$, obtemos:

$\triangle AHC \sim \triangle ABC \rightarrow \dfrac{\overline{HC}}{\overline{AH}} \cong \dfrac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$ ou

$\dfrac{m}{h} = \dfrac{h}{n} \rightarrow h^2 = m \cdot n$



Terceira relação: O produto entre as medidas dos catetos é igual ao produto entre as medidas da hipotenusa e da altura correspondente a ela.

Considerando $\triangle ABC$ da figura da página anterior, obtemos:

$$\left.\begin{matrix} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{matrix}\right\} b^2 \cdot c^2 = (a \cdot m) \cdot (a \cdot n) \rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot mn$$

$$b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2$$

Logo: $b \cdot c = a \cdot h$

Quarta relação: Teorema de Pitágoras

O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas de cada cateto.

Considerando o $\triangle ABC$ da figura, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{array}\right\} b^2 + c^2 = am + an \rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$$

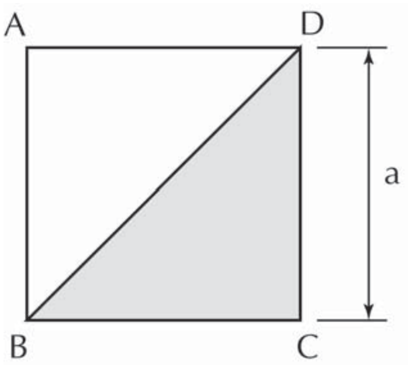
$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$

Logo: $b^2 + c^2 = a^2$

Aplicações da quarta relação

1. *Cálculo da diagonal d do quadrado em função do lado a.*

   Consideremos o quadrado $ABCD$ da figura abaixo e seja d = diagonal e a = lado do quadrado.



   Logo:

   Aplicando o *Teorema de Pitágoras* no $\triangle BCD$, obtemos:

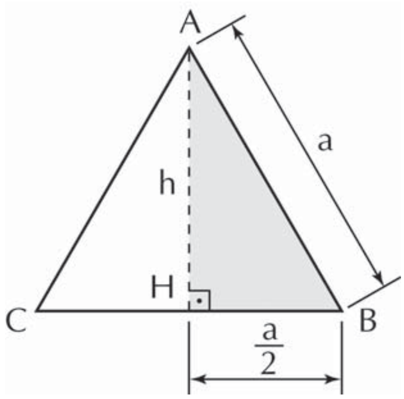
   $\rightarrow a^2 + a^2 = d^2 \rightarrow d^2 = 2a^2$

$$d = a\sqrt{2}$$

2. *Cálculo da altura h de um triângulo eqüilátero em função do lado a.*

   Consideremos o triângulo eqüilátero da figura a seguir e seja: a = lado do triângulo eqüilátero e h = altura do triângulo.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABH$, obtemos:

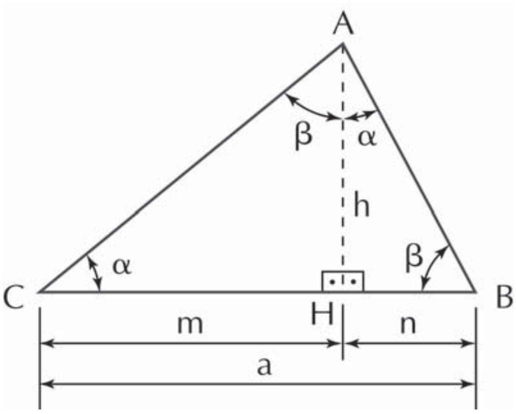


$$\rightarrow h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

ou: $h^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4}$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Exercícios



39. Considerando-se o triângulo *ABC* da figura acima, calcule: b; m; n; h; $p = a + b + c$, sendo: $a = 5$ cm e $c = 4$ cm.

40. Considerando-se o triângulo da figura acima e dadas as medidas: $m = 6{,}4$ km; $n = 3{,}6$ km; $b = 6$ km, calcule as medidas h; $p = a + b + c$; a; c.

41. Calcule a medida da diagonal (d) de um quadrado de lado $a = 5$ cm.

42. Calcule a medida do lado (a) de um quadrado de diagonal $d = 5$ cm.

43. Calcule a medida do lado (a) de um triângulo eqüilátero cuja altura $h = 3$ dm.

44. Calcule a medida da altura (h) de um triângulo eqüilátero de lado $a = 8$ m.

45. As medidas dos lados de dois quadrados estão entre si assim como 3 está para 2. Calcule suas medidas e de suas diagonais, sabendo-se que a diferença entre suas medidas vale 4 m.

46. As medidas das alturas de dois triângulos eqüiláteros estão entre si assim como 5 está para 3. Calcule suas medidas e de suas alturas, sabendo-se que uma das medidas dos lados é 20 m.

Respostas

1. Planas: a,b, c, f, g.
   Espaciais: d, e, h.
2. Os gráficos são formados por pontos unidos entre si por linhas retas ou curvas.
   A esses pontos dá-se o nome de nós. Não é possível reproduzir todas as figuras com um só traço, mas quando essa figura pode ser desenhada sem levantar o lápis do papel nem passar duas ou mais vezes pela mesma linha, então esse gráfico é chamado de euleriano.
3. 
4. a) 101°28′ d) 8°41′
   b) 36°21″ e) 73°
   c) 56° f) 32°32′12″
5. 45°
6. $x = 26°12'$; $y = 12°\ 18'$
7. 45°
8. 90°
9. 180°
10. a) $a = 20°$ c) $a = 155°$
    b) $a = 65°$ d) $a = 50°$
11. 60°
12. 30°
13. a) 180° c) 150°
    b) 120° d) 135°
14. a) $d = 0$ f) $d = 20$
    b) $d = 2$ g) $d = 27$
    c) $d = 5$ h) $d = 35$
    d) $d = 9$ i) $d = 90$
    e) $d = 14$ j) $d = 170$
15. a) $n = 5$; pentalátero
    b) $n = 7$; heptalátero
    c) $n = 9$; nealátero
    d) $n = 4$; quadrilátero
    f) $n = 15$; pentadecalátero
    g) $n = 11$; undecalátero

16 

17. a) Equilátero
    b) Isósceles
    c) Escaleno
18. a) Retângulo
    b) Obtusângulo
    c) Acutângulo

19. a) $x = 55°$
Triângulo retângulo

b) $y = 60°$
Triângulo obtusângulo

c) $z = 60°$
Triângulo acutângulo
(ou eqüiângulo)

d) $v = 60°$
Triângulo acutângulo

20. a) $\alpha = 48°$
b) $\alpha = 90°$
c) $\alpha = 120°$
d) $\alpha = 120°$
e) $\alpha = 60°$
f) $\alpha = 50°$

21. a)



b)



c)



d)



22. 70°

23. 29 cm

24. 4 cm

25. $\hat{A} = 70°$ e $C = 50°$

26. a) LLL
b) ALA
c) LA_aLA_o
d) LAL
e) LAL
f) LA_aLA_o
g) LA_aLA_o
h) LAL

27. $\widehat{1} \cong \widehat{3} \cong \widehat{5} \cong \widehat{7} = 48°$
$\widehat{2} \cong \widehat{4} \cong \widehat{6} \cong \widehat{8} = 132°$

28. $\alpha \cong \beta = 42°$
$\gamma \cong 138°$



29. a) $\alpha = 72°$ e) $\alpha = 100°$
b) $\alpha = 56°$ f) $\alpha = 80°$
c) $\alpha = 150°$ g) $\alpha = 50°$
d) $\alpha = 40°$

30. a) $S_i = 180°$ e) $S_i = 1.260°$
b) $S_i = 360°$ f) $S_i = 1.440°$
c) $S_i = 540°$ g) $S_i = 1.800°$
d) $S_i = 720°$ h) $S_i = 2.340°$

31. a) $\alpha_i = 60°$, $\alpha_e = 120°$ e) $\alpha_i = 140°$, $\alpha_e = 40°$
b) $\alpha_i = 90°$, $\alpha_e = 90°$ f) $\alpha_i = 144°$, $\alpha_e = 36°$
c) $\alpha_i = 108°$, $\alpha_e = 72°$ g) $\alpha_i = 150°$, $\alpha_e = 30°$
d) $\alpha_i = 120°$, $\alpha_e = 60°$ h) $\alpha_i = 156°$, $\alpha_e = 24°$

32. $x = 50°$
$C\widehat{D}A \cong A\widehat{B}C = 130°$
$B\widehat{A}D \cong D\widehat{C}B = 50°$

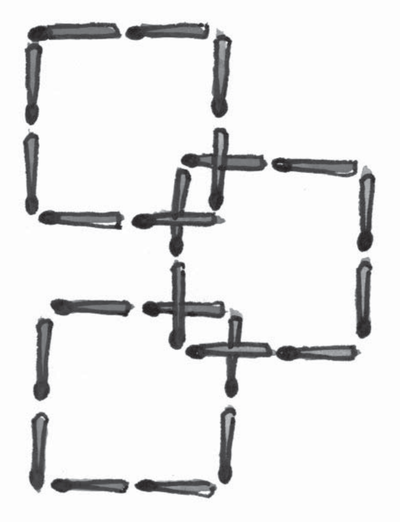
33. $AC = 14$ cm
$BD = 10$ cm

34. $AC = BD = 5$

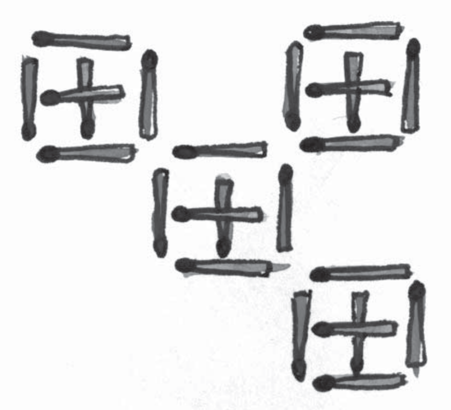
35. $\widehat{A} = 60°$

36. a) $x = 10$ m b) $x = 7$ cm

37. a)



b)

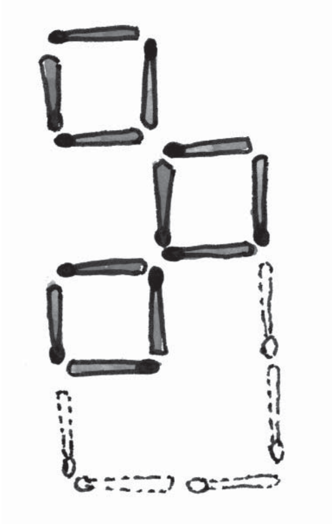


c)





d)



e)



f)



38. a) $x = 8$ cm
    b) $x = 8$ cm
    c) $x = 21$ km

39. $b = 3$ cm $m = 3{,}2$ cm
    $n = 1{,}8$ cm $h = 2{,}4$ cm
    $p = 12$ cm

40. $h = 4{,}8$ km $p = 24{,}0$ km
    $a = 10{,}0$ km $c = 8{,}0$ km

41. $d = 5\sqrt{2}\ m$

42. $a = 2{,}5\sqrt{2}$ cm

43. $h = 4\sqrt{3}$ dm

44. $n = 2\sqrt{3}$ m

45. L = 12 m $H = 12\sqrt{2}$ m
    $\ell = 8$ m $h = 8\sqrt{2}$ m

46. L = 20 m $\ell = 12$ m
    $H = 5\sqrt{3}$ m $h = 3\sqrt{3}$ m



Capítulo 17



TRIGONOMETRIA

A finalidade da *trigonometria*, do grego *trigonom* = triângulos, *metron* = medida, consiste na resolução de triângulos por intermédio do cálculo e do estudo das funções trigonométricas ou circulares.



Medida dos ângulos e dos arcos

O ângulo central (ou cêntrico) é obtido medindo-se o arco compreendido entre os lados dele. Então, para medirmos um ângulo, poderemos proceder medindo o arco correspondente a ele e vice-versa. Por isso, poderemos nos referir indistintamente a *medida de ângulo* ou *medida de arco*. Para executarmos qualquer medição, deveremos primeiramente adotar

uma medida padrão, que é conhecida por *unidade*, e determinar quantas vezes (múltipla ou submúltipla) ela estará contida em tal medição.

Sistemas de medidas trigonométricas

1. *Sistema circular*

   Unidade → Radiano (rad)

   Define-se por radiano o ângulo central (ou cêntrico) que compreende um arco de circunferência de comprimento igual ao comprimento do raio da circunferência.

   Da geometria, temos:

   $C = 2\pi r$ (comprimento de uma circunferência)

   Logo, o número de radianos de uma circunferência será:

   $$\frac{C}{r} = 2\pi \text{ radianos}$$

   onde *r* é o raio dela.



2. *Sistema centesimal*

   Unidade → Arco Grado = Grado

   Define-se por arco grado, ou somente grado, o arco que é igual a um quatrocentos avos (1/400) do comprimento do arco da circunferência.

   O grado tem 100 minutos centesimais e, para cada minuto, 100 segundos centesimais.

   Este sistema possui submúltiplos:

   Grado → submúltiplos:
   — decígrado
   — centígrado
   — milígrado
   — decimilígrado etc.

3. *Sistema sexagesimal*

Unidade → Arco Grau

Define-se por arco grau o arco que é igual a um trezentos e sessenta avos (1/360) do comprimento do arco da circunferência.

O grau tem 60 minutos e, para cada minuto, 60 segundos.

Este sistema possui submúltiplos, mas sem denominações especiais.

4. *Sistema brasileiro legal de medida*

a) **Unidade Legal**:

É o ângulo reto.

b) **Unidade Legal de Ângulo**:

É o grau sexagesimal, ou grau, ou também o radiano.

Em resumo:

$$90° = 100 \text{ grados} = \frac{\pi}{2} \text{ radianos}$$

$$180° = 200 \text{ grados} = \pi \text{ radianos}$$

$$270° = 300 \text{ grados} = \frac{3\pi}{2} \text{ radianos}$$

$$360° = 400 \text{ grados} = 2\pi \text{ radianos}$$



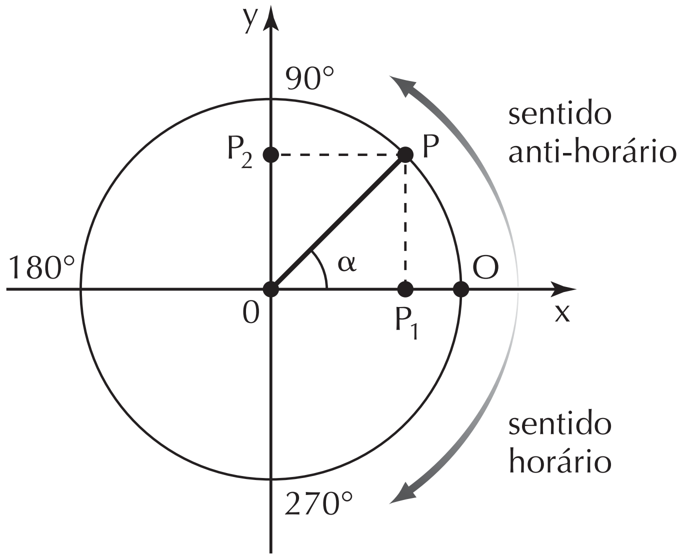
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As funções trigonométricas são em número de seis: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.

A representação dessas funções trigonométricas em função de um ângulo, será:

sen, cos, tg, cotg, sec e cossec.

Consideremos *círculo trigonométrico* da figura a seguir. Define-se por círculo trigonométrico o círculo cuja medida do raio é unitária, ou seja: igual a uma medida de comprimento. Exemplo: 1 dm, ou 1 cm ou 1 mm etc.



Seno de um ângulo

Entende-se por seno de um ângulo (α na figura) a medida da ordenada do ponto P_2.

Assim, sen $\alpha = \overline{OP}_2$.

Variação do seno ($0 \leqslant \alpha \leqslant 360°$)

Tomando o arco $\overset{\frown}{OP}$ como variando no sentido anti-horário temos:

- $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$: sen α é crescente, variando de 0 a +1;
- $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$: sen α é decrescente, variando de +1 a 0;
- $180° \leqslant \alpha \leqslant 270°$: sen α é decrescente, variando de 0 a −1;
- $270° \leqslant \alpha \leqslant 360°$: sen α é crescente, variando de −1 a 0.

Esquematicamente, temos:

α	0	↗	90°	↗	180°	↗	270°	↗	360°
sen α	0	↗	+1	↘	0	↘	−1	↗	0

Cosseno de ângulo

Entende-se por cosseno de um ângulo (α na figura) a medida da abscissa do ponto P_1.

Assim, $\cos \alpha = \overline{OP_1}$.

Variação do cosseno ($0 \leqslant \alpha \leqslant 360°$)

Tomando o arco $\widehat{OP}$ como variando no sentido anti-horário temos:

- $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$: cos α é decrescente, variando de +1 a 0;
- $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$: cos α é decrescente, variando de 0 a −1;
- $180° \leqslant \alpha \leqslant 270°$: cos α é crescente, variando de −1 a 0;
- $270° \leqslant \alpha \leqslant 360°$: cos α é crescente, variando de 0 a 1.

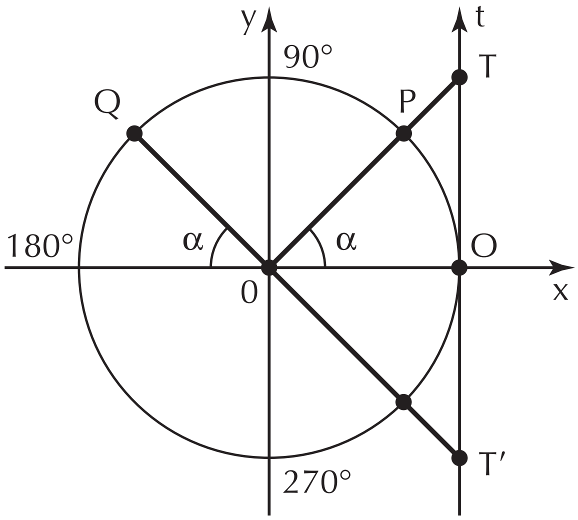
Esquematicamente, temos:

α	0	↗	90°	↗	180°	↗	270°	↗	360°
cos α	+1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1



Tangente de um ângulo

Considere o círculo trigonométrico da figura ao lado:



Entende-se por tangente de um ângulo (α na figura) a medida do segmento $\overline{OT}$, sendo nesse caso positiva ou $\overline{OT'}$, sendo nesse caso negativa.

Assim, $\text{tg } \alpha = \overline{OT}$ e $\text{tg } (180° - \alpha) = \overline{OT'}$.

Variação da tangente ($0 \leqslant \alpha \leqslant 360°$)

Tomando o arco $\widehat{OP}$ variando no sentido anti-horário temos:

- $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$: tg α é crescente, variando de 0 a $+\infty$;
- $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$: tg α é decrescente, variando de $+\infty$ a 0;
- $180° \leqslant \alpha \leqslant 270°$: tg α é decrescente, variando de 0 a $-\infty$;
- $270° \leqslant \alpha \leqslant 360°$: tg α é crescente, variando de $-\infty$ a 0.

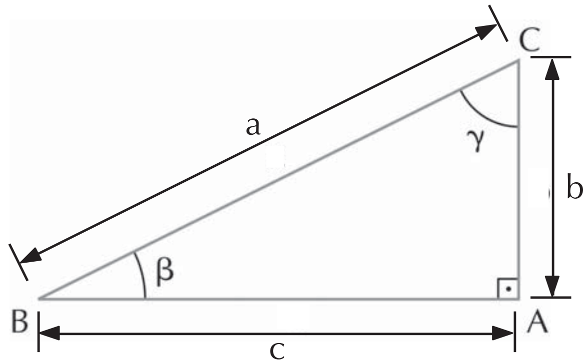
Esquematicamente, temos:

α	0	↗	90°	↗	180°	↗	270°	↗	360°
tg α	0	↗	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$	↗	0



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Consideremos o triângulo *ABC* retângulo em *A* e vamos determinar as funções trigonométricas a partir de seus elementos principais, destacados na figura a seguir



Seno

O seno de um ângulo é igual à razão entre o *cateto oposto* ao ângulo e a *hipotenusa*.

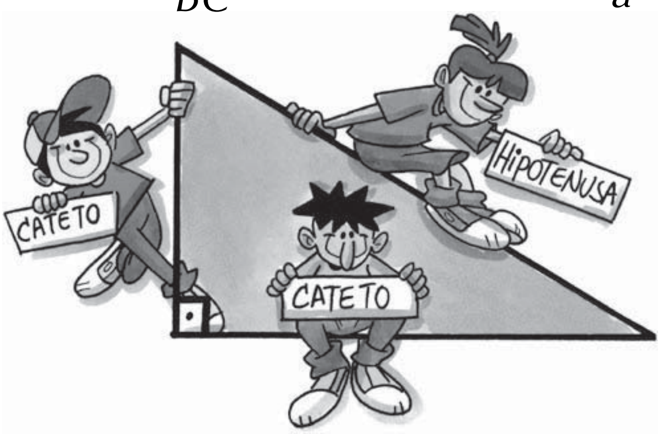
Assim, da figura obtemos:

$$\text{seno ângulo} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Da figura

$$\text{sen } \widehat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad \text{ou seja: sen } \beta = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen } \widehat{C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad \text{ou seja: sen } \gamma = \frac{c}{a}$$



Cosseno

O cosseno de um triângulo é igual à razão entre o *cateto adjacente* ao ângulo e a *hipotenusa*.

Assim, da figura obtemos:

$$\text{cosseno ângulo} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \text{ ou seja: } \cos \beta = \frac{c}{a}$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \text{ ou seja: } \cos \gamma = \frac{b}{a}$$

Tangente

A *tangente* de um ângulo é igual à razão entre o *cateto oposto* ao ângulo e o *cateto adjacente* a ele.

Assim, da figura obtemos:

$$\text{tangente ângulo} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\text{tg } \widehat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \text{ ou seja: } \text{tg } \beta = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \widehat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \text{ ou seja: } \text{tg } \gamma = \frac{c}{b}$$

As relações entre as funções cotangente, secante e cossecante são:

$$\text{cotangente ângulo} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$$

$$= \frac{1}{\text{tangente ângulo}}$$

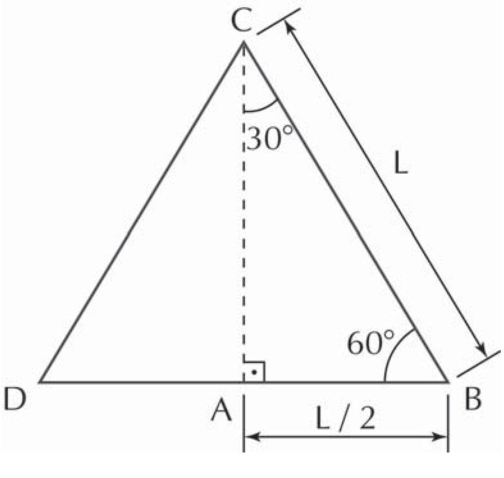
$$\text{secante ângulo} = \frac{1}{\text{cosseno ângulo}}$$

$$\text{cossecante ângulo} = \frac{1}{\text{seno ângulo}}$$

DETERMINAÇÕES DE VALORES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DOS ÂNGULOS DE 30°, 45° E 60°

Funções trigonométricas de 30° e 60°

Consideremos o triângulo *BCD* da figura a seguir. Observando a figura, poderemos extrair os seguintes elementos:



$$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DB} = L$$

$$\overline{AB} = \frac{L}{2}$$

$$\overline{AC} = \text{altura do } \triangle BCD = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

No $\triangle ABC$ temos:

$$\text{sen } \widehat{C} = \text{sen } 30° = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \widehat{C} = \cos 30° = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{L\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } \widehat{C} = \text{tg } 30° = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}} = \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{L\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

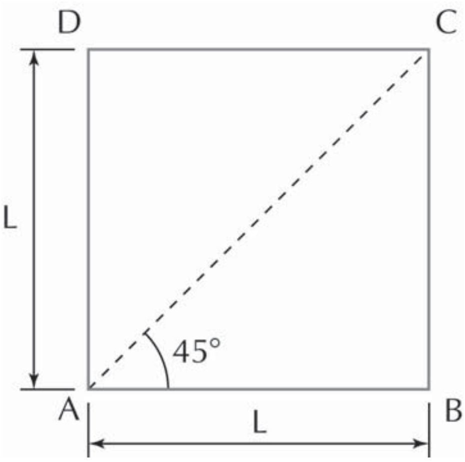
$$\text{sen } \widehat{B} = \text{sen } 60° = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{L\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \widehat{B} = \cos 60° = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } \widehat{B} = \text{tg } 60° = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{L\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{L} = \sqrt{3}$$

Funções trigonométricas de 45°

Consideremos o quadrado ABCD da figura ao lado. Observando a figura podemos extrair os seguintes elementos:



$\overline{BC} = \overline{AB} = L$

$\overline{AC}$ = diagonal do quadrado de lado L é igual a $L\sqrt{2}$

No $\triangle ABC$ temos:

$$\text{sen}\ \frac{\widehat{A}}{2} = \text{sen}\ 45° = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\ \frac{\widehat{A}}{2} = \cos\ 45° = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\ \frac{\widehat{A}}{2} = \text{tg}\ 45° = \frac{L}{L} = 1$$

Podemos resumir os valores encontrados em uma tabela:

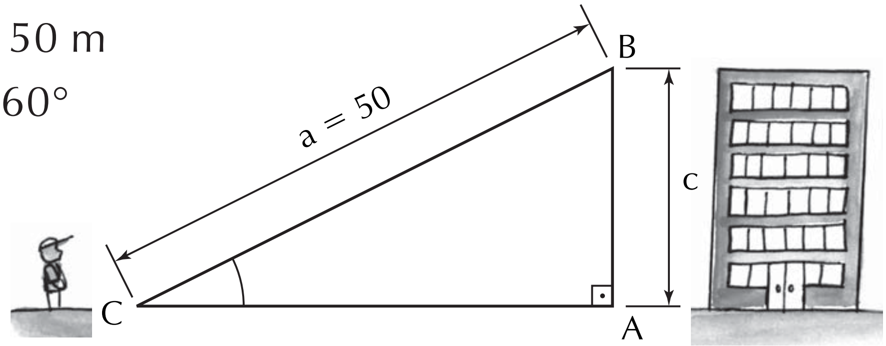
	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

Exemplo 1

Calcule a medida da altura do prédio ilustrado na figura abaixo, sendo dados:

$CB = 50$ m

$\widehat{C} = 60°$



Solução

Procuremos a função trigonométrica que nos dê uma relação entre a altura do prédio e o ângulo *C* e a hipotenusa. Sabe-se que tal função é o sen *C*.

$$\text{sen } \widehat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad \text{ou sen } 60° = \frac{C}{50}$$

Donde:

$$c = 50 \cdot \text{sen } 60°$$

$$c = 50 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

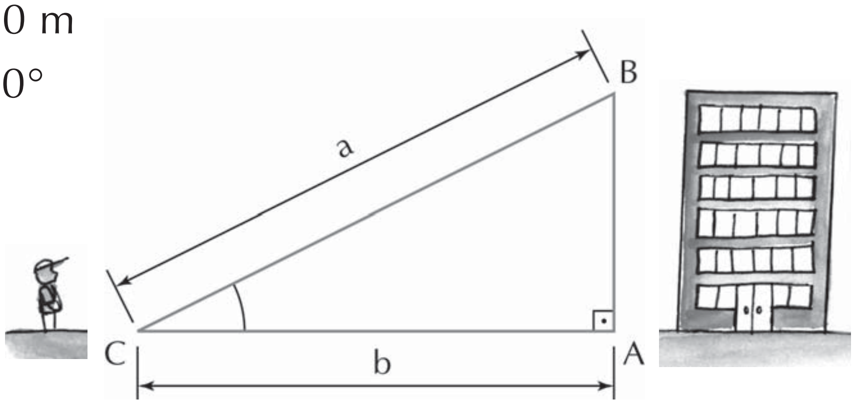
$$c = 25\sqrt{3} \text{ m} \simeq 43{,}3 \text{ m}$$

Exemplo 2

Calcule a distância que o observador está do prédio na figura a seguir, sendo dados:

$CB = 50$ m

$\widehat{C} = 60°$



Solução

Procuremos a função trigonométrica que nos dê uma relação entre o cateto adjacente ao ângulo *C* e a hipotenusa. Sabe-se que tal função é o cos *C*.
Logo:

$$\cos \widehat{C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \text{ ou } \cos 60° = \frac{b}{50}$$

$$b = 50 \cdot \cos 60°$$

$$b = 50 \times \frac{1}{2}$$

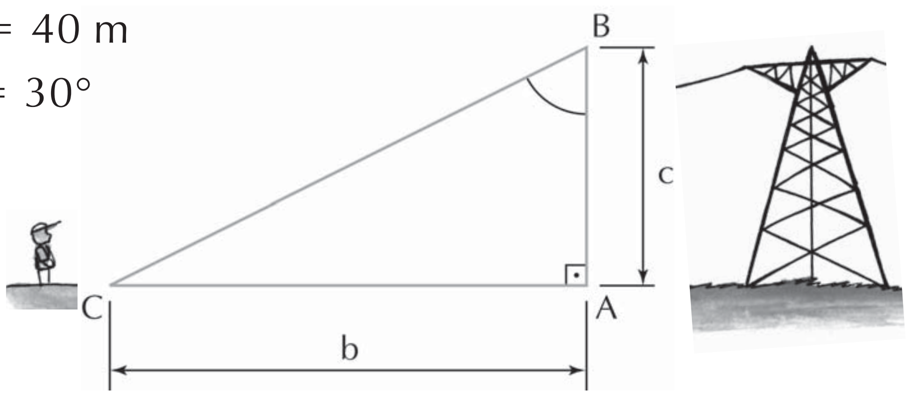
$$b = 25 \text{ m}$$

Exemplo 3

Calcule a distância do observador ao poste, sendo dados:

$AB = 40$ m

$\widehat{B} = 30°$



Solução

Procuremos a função trigonométrica que nos dê uma relação entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao $\widehat{B}$.

$$\text{tg } 30° = \frac{b}{40}$$

$$b = 40 \times \text{tg } 30°$$

$$b = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$b = 40\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m} \simeq 23 \text{ m}$$

Utilizando tabelas trigonométricas

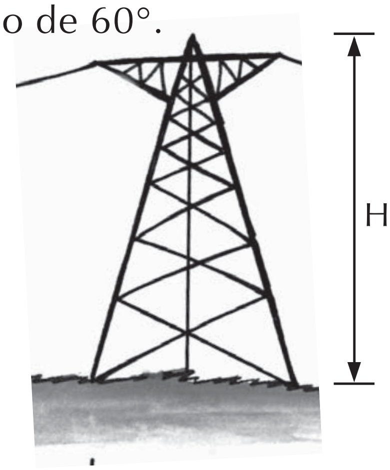
Existem tabelas que já nos fornecem calculados os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos.

Há uma tabela no final deste livro que nos fornece os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 1° a 89°, variando de grau em grau.

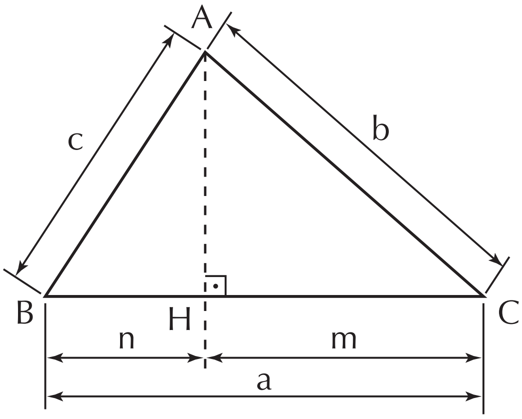
Esses valores foram aproximados para três casas decimais.

Exercícios

1. Calcule a medida do cateto $\overline{AB}$ de um triângulo retângulo *ABC*, dadas:
   - a medida da hipotenusa $BC = 6$ m
   - a medida do ângulo $\widehat{B} = 30°$
2. Calcule a medida do cateto $\overline{AC}$ de um triângulo retângulo *ABC*, dadas:
   - a medida da hipotenusa $BC = 7$ cm
   - a medida do ângulo $\widehat{C} = 45°$
3. Calcule a medida do cateto $\overline{AC}$ de um triângulo retângulo *ABC*, dadas:
   - a medida da hipotenusa $BC = 30$ m
   - a medida do ângulo $\widehat{B} = 30°$
4. Calcule a medida do cateto $\overline{AB}$ de um triângulo retângulo *ABC*, dadas:
   - a medida da hipotenusa $BC = 30$ m
   - a medida do ângulo $\widehat{C} = 45°$
5. Calcule a medida da altura *H* de uma torre de transmissão de energia elétrica, sabendo-se que a medida da distância do ponto em que se encontra o observador até sua base é de 60 m, e do qual se vê a torre sob um ângulo de 60°.



6. Calcule as medidas dos seguintes elementos da figura a seguir.



$$\begin{cases} \overline{BH} \cong n \\ \overline{CH} \cong m \\ \overline{BC}\ \overline{BC} \cong a \end{cases}$$

Sendo dados:

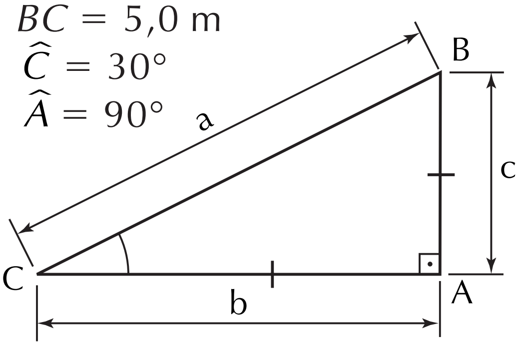
$$\begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ \widehat{B} = 60°,\ \widehat{C} = 45° \\ AC = 6 \text{ cm},\ AB = 9 \text{ cm} \end{cases}$$

7. Calcule as medidas dos seguintes elementos da figura:

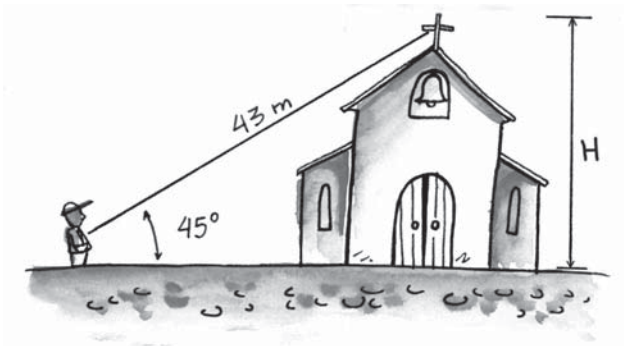
$\overline{AB}$ e $\overline{AC}$

dados:

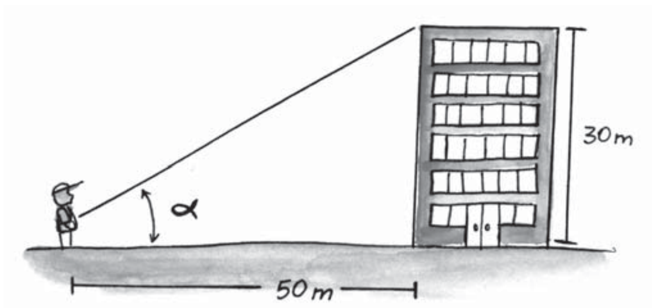
$BC = 5{,}0$ m
$\widehat{C} = 30°$
$\widehat{A} = 90°$



8. Calcule a medida da altura H da torre de uma igreja, sabendo-se que a medida da distância do ponto em que se encontra o observador até o seu ponto mais alto é de 43 m e do qual o observador a vê sob um ângulo de 45°.



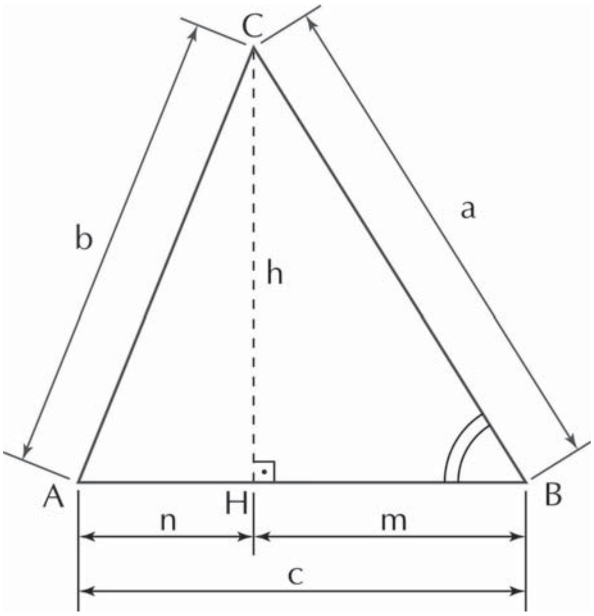
9. Determine a medida do ângulo (α), do qual é visto um edifício de 30 m de altura e que dista do observador 50 m.



RELAÇÕES MÉTRICAS EM TRIÂNGULOS QUE NÃO SÃO RETÂNGULOS

Primeira relação: Num triângulo não retângulo, o quadrado da medida do lado oposto ao ângulo agudo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, *menos* o duplo

produto entre a medida de um desses lados e a medida da projeção do outro sobre este.



Seja o $\triangle ABC$ da figura, temos no

$$\triangle BCH \rightarrow (\widehat{H} = 90°):$$

$$a^2 = m^2 + h^2 \quad \text{(I)}$$

No $\triangle ACH \rightarrow (\widehat{H} = 90°)$:

$$b^2 = n^2 + h^2 \quad \text{(II)}$$

Mas: $$c = m + n \quad \text{(III)}$$

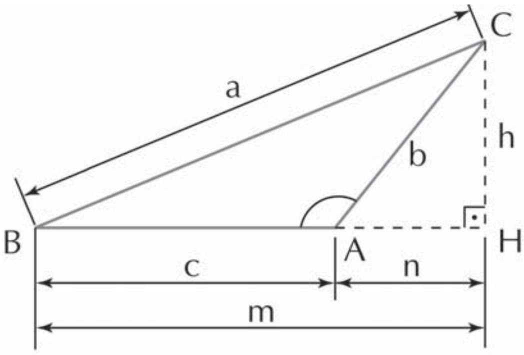
Substituindo-se (II) e (III) em (I), obtemos:

$$a^2 = (c - n)^2 + (b^2 - n^2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$$

Segunda relação: Num triângulo obtusângulo, o quadrado da medida do lado oposto ao ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, *mais* o duplo produto entre a medida de um desses lados e a medida da projeção do outro sobre este.

Seja o $\triangle ABC$ da figura abaixo.



Temos: no $\triangle BCH \rightarrow a^2 = m^2 + h^2$ (IV)

no $\triangle ACH \rightarrow b^2 = n^2 + h^2$ (V)

Mas $\rightarrow m = c + n$ (VI)

Substituindo-se (V) e (VI) em (IV):

$$a^2 = (c + n)^2 + (b^2 - n^2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cn$$



Reconhecimento da natureza de um triângulo

Suponhamos um $\triangle ABC$ do qual se quer saber se é *acutângulo* ou *retângulo* ou, ainda, *obtusângulo*. Para tanto, toma-se a medida do lado que se opõe ao maior ângulo, ou seja: a medida do lado maior (seja a) e verificam-se as seguintes relações:

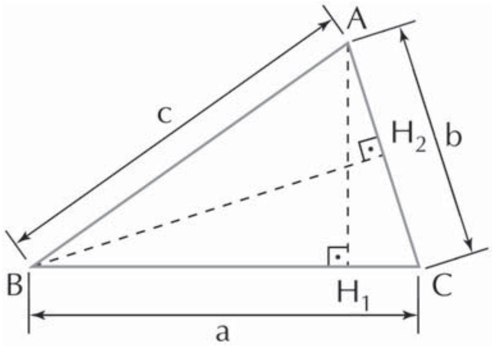
$a^2 < b^2 + c^2 \rightarrow$ é acutângulo $(\widehat{A} < 90°)$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow$ é retângulo $(\widehat{A} = 90°)$

$a^2 > b^2 + c^2 \rightarrow$ é obtusângulo $(\widehat{A} > 90°)$

LEI DOS SENOS

Em um triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais às medidas dos senos dos ângulos opostos a ele.



Seja $\triangle ABC$ da figura acima, onde $\overline{AH_1} \cong h_1$ e $\overline{BH_2} \cong h_2$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle AH_1B \rightarrow \text{sen}\,\widehat{B} = \dfrac{h_1}{c} \rightarrow c \cdot \text{sen}\,\widehat{B} = h_1 \\ \triangle AH_1C \rightarrow \text{sen}\,\widehat{C} = \dfrac{h_1}{b} \rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen}\,\widehat{C} \end{array}\right\} c \cdot \text{sen}\,\widehat{B} = b \cdot \text{sen}\,\widehat{C} \quad \text{(I)}$$

Parte B)

$$\left.\begin{array}{l} \triangle AH_2B \rightarrow \text{sen}\,\widehat{A} = \dfrac{h_2}{c} \rightarrow h_2 = c \cdot \text{sen}\,\widehat{A} \\ \triangle CH_2B \rightarrow \text{sen}\,\widehat{C} = \dfrac{h_2}{a} \rightarrow h_2 = a \cdot \text{sen}\,\widehat{C} \end{array}\right\} c \cdot \text{sen}\,\widehat{A} = a \cdot \text{sen}\,\widehat{C} \quad \text{(II)}$$

De (I) $\rightarrow \dfrac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}}$ De (II) $\rightarrow \dfrac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}}$

Portanto,

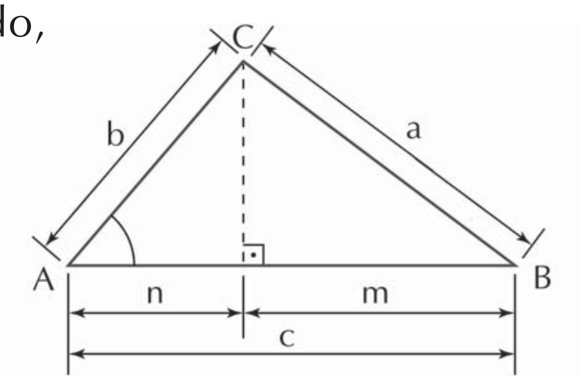
$$\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}}$$

LEI DOS COSSENOS

Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, *menos* o duplo produto entre as medidas desses dois lados e o *cosseno* do ângulo por eles formados.

Seja o $\triangle ABC$ da figura ao lado, onde:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$ (I)



No $\triangle AHC$ $\cos \widehat{A} = \dfrac{n}{b} \rightarrow$

$\rightarrow n = b \cdot \cos \widehat{A}$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2c(b \cos \widehat{A}) \rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{A}$

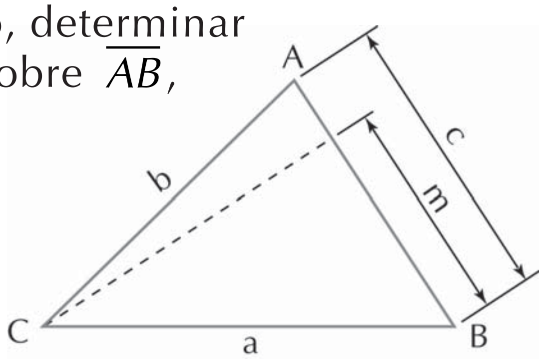
Exemplo 1

Dado o $\triangle ABC$ da figura abaixo, determinar a medida da projeção de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AB}$, dados:

$a = 7$ dam;

$b = 6$ dam;

$c = 5$ dam



Solução

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ cm$

$6^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot m \rightarrow m = 3{,}8$ dam

Exemplo 2

Reconhecer a natureza do $\triangle ABC$ do exercício anterior:

Solução

Lado maior $\rightarrow a$

$a^2 = 49$

$b^2 + c^2 = 6^2 + 25^2 = 61$

Portanto, $49 < 61$.

Logo o triângulo é acutângulo.

Exemplo 3

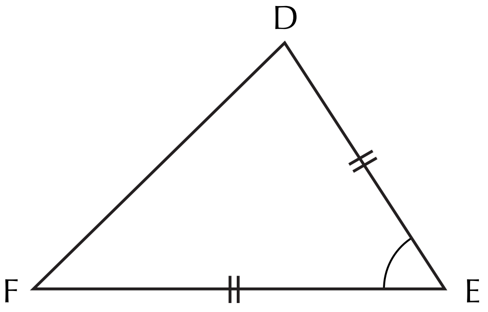
Seja o triângulo *DEF*, onde:

$\hat{E} = 62°$;

$DE = 8$ cm;

$EF = 5$ cm

Calcular $\overline{DF}$.



Solução

Pela Lei dos Cossenos, temos:

$(\overline{DF})^2 = (\overline{DE})^2 + (\overline{EF})^2 - 2 \cdot (\overline{DE}) \cdot (\overline{EF}) \cdot \cos \hat{E}$

$(DF)^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 0{,}4695$

$DF = 7{,}1$ cm

Exemplo 4

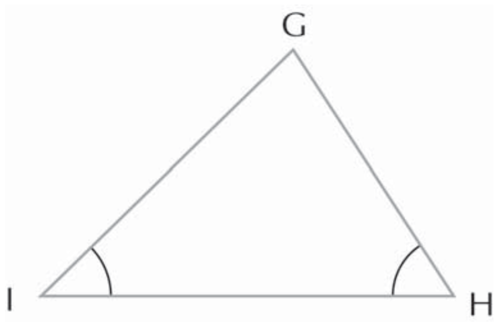
Seja o triângulo *GHI*, onde:

$\hat{H} = 58°$;

$\hat{I} = 38°$;

$GH = 8$ cm.

Calcular $\overline{GI}$.



Solução

Pela Lei dos Senos, temos:

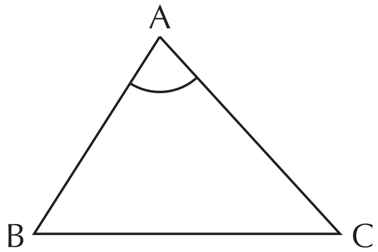
$$\frac{\overline{GI}}{\text{sen } \hat{H}} = \frac{\overline{GH}}{\text{sen } \hat{I}} \rightarrow \frac{GI}{0{,}8480} = \frac{8}{0{,}6157} \rightarrow GI = 11{,}0 \text{ cm}$$

Exercícios

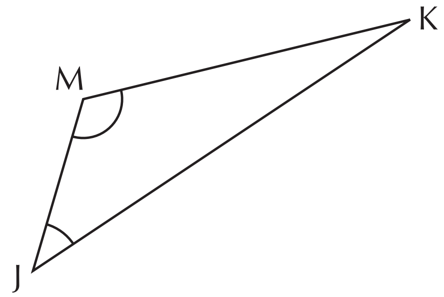
10. Dadas as medidas dos lados dos triângulos, identifique-os como acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

a)	b)	c)
$a = 4$	$a = 4$	$a = 2$
$b = 3$	$b = 8$	$b = 6$
$c = 5$	$c = 9$	$c = 7$

11. Seja o triângulo *ABC* a seguir, onde $\widehat{A} = 75°$, $AC = 8$ cm e $AB = 7$ cm, calcule $\overline{BC}$.



12. No triângulo *KJM* a seguir, calcule $\overline{MJ}$.
Dados:
$\widehat{M} = 120°$
$\widehat{J} = 40°$
$MK = 20$ m

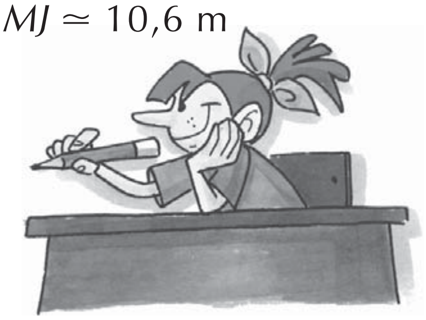


Respostas

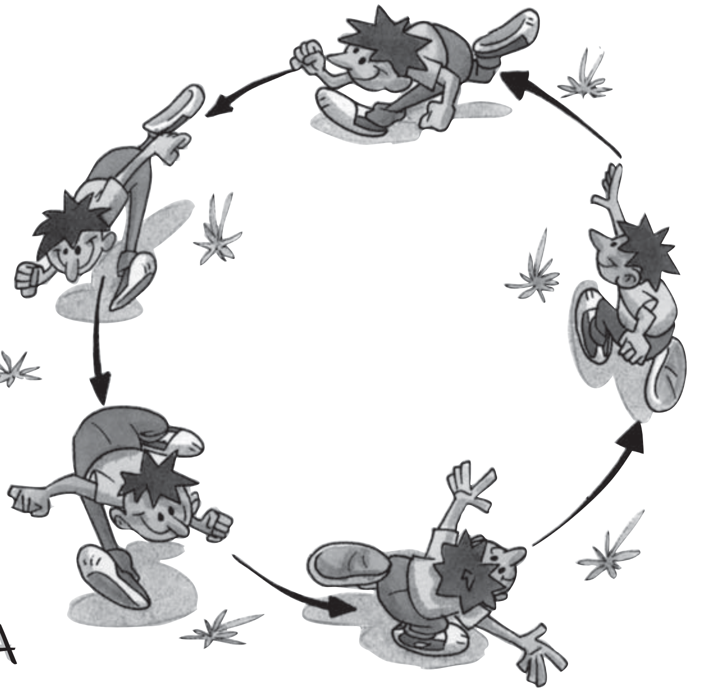
1. $AB \simeq 5{,}2$ m
2. $AC \simeq 4{,}9$ cm
3. $AC = 15$ m
4. $AB \simeq 21{,}2$ m
5. $H \simeq 104$ m
6. $n = 4{,}5$ cm
   $m \simeq 4{,}2$ cm
   $a \simeq 8{,}7$ cm
7. $AB = 2{,}5$ m
   $AC \simeq 4{,}3$ m
8. $H \simeq 30{,}4$ m
9. $\alpha \simeq 31°$

7. $AB = 2{,}5$ m
   $AC \simeq 4{,}3$ m
8. $H \simeq 30{,}4$ m
9. $\alpha \simeq 31°$

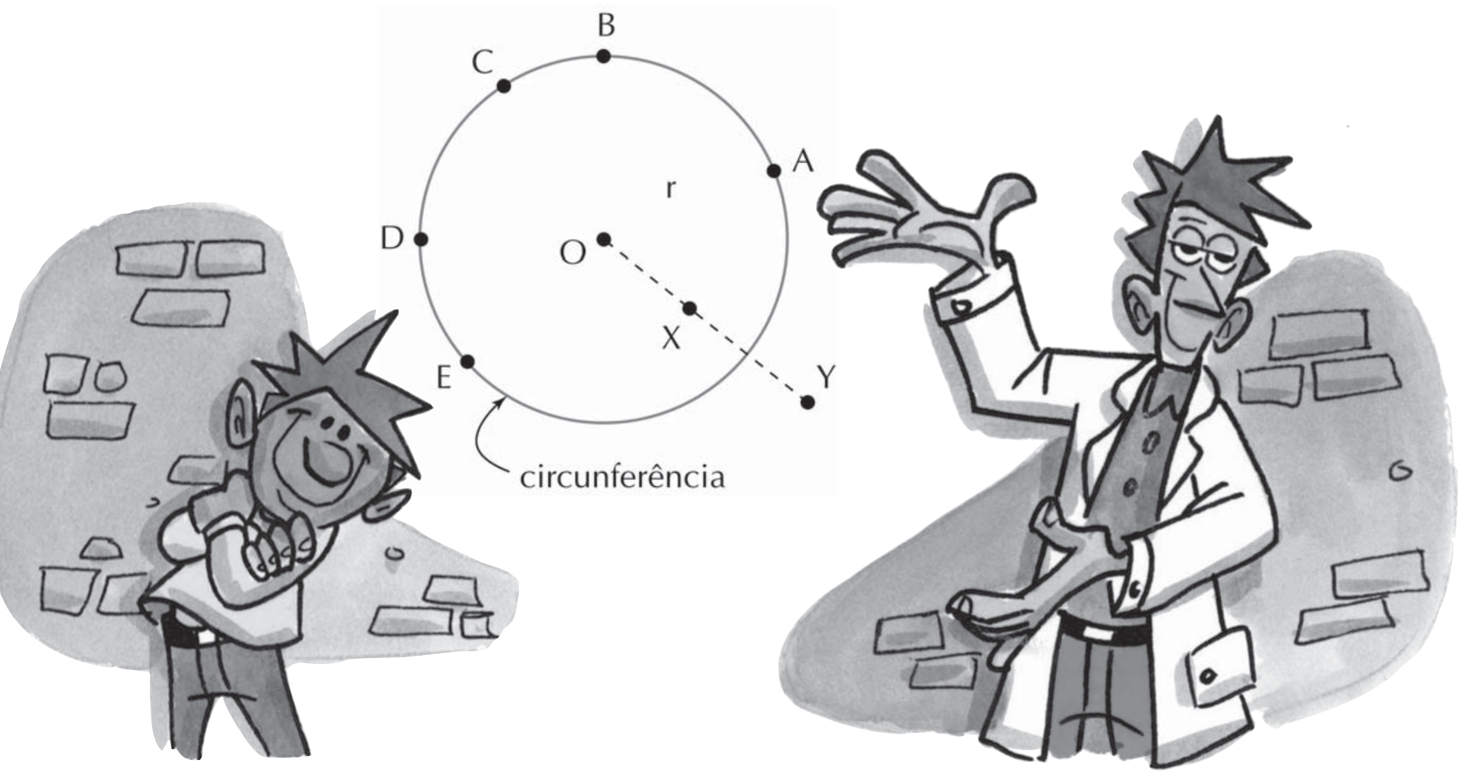
10. a) retângulo
    b) acutângulo
    c) obtusângulo
11. $BC \simeq 9{,}2$ cm
12. $MJ \simeq 10{,}6$ m



Capítulo 18



CIRCUNFERÊNCIA



Define-se como *circunferência* o conjunto de todos os pontos do plano eqüidistantes de um ponto fixo *O*, chamado de *centro* da circunferência, distância essa que é o *raio* (*r*): $\overline{OA} = \overline{OB} = r$.

Indica-se (*O*, *r*) circunferência de centro *O* e raio *r*.

Pontos internos

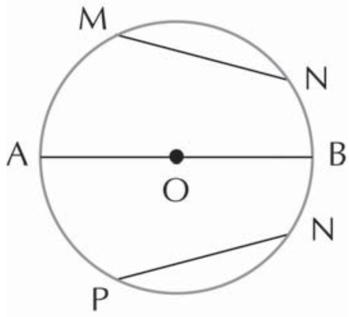
São os pontos cuja distância ao centro é menor do que o raio. É o caso do ponto X, onde: $\overline{OX} < \overline{OA}$.

Pontos externos

São os pontos cuja distância ao centro é maior do que o raio. É o caso do ponto Y, onde: $\overline{OY} > \overline{OA}$.

Cordas em circunferência

Define-se como *corda* em uma circunferência o segmento de reta cujos extremos pertencem à circunferência.



Assim, temos:

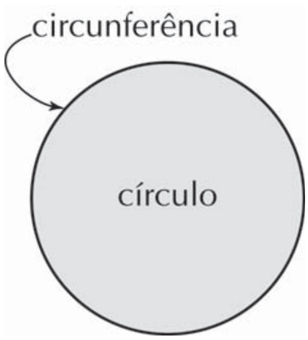
$\overline{AB}$ é corda, pois $A \in (O, r)$ e $B \in (O, r)$ e nesse caso é também chamado de *diâmetro*.

$\overline{MN}$ é corda, pois $M \in (O, r)$ e $N \in (O, r)$

$\overline{PN}$ é corda, pois $P \in (O, r)$ e $Q \in (O, r)$

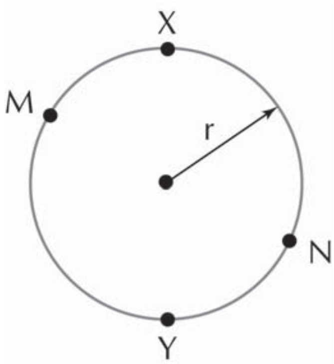
CÍRCULO

Define-se como *círculo* a região do plano delimitada por uma circunferência.



Arco circular

Seja a circunferência de centro *O* e raio *r*. Tomemos sobre a circunferência dois pontos *M* e *N*. Define-se como *arco circular* qualquer uma dessas duas partes.

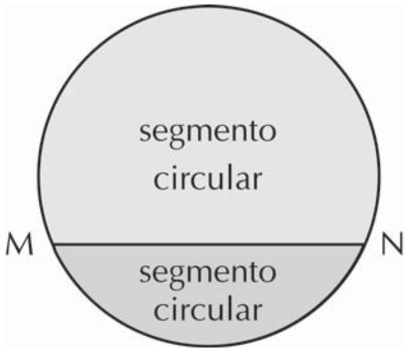


Indicando-se por: $\overset{\frown}{MXN}$, lê-se arco MXN;

$\overset{\frown}{MYN}$, lê-se arco MYN

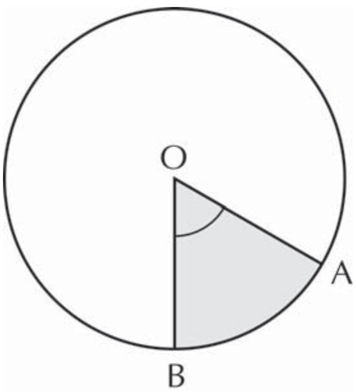
Segmento circular

A corda $\overline{MN}$ divide o círculo em duas regiões. Cada uma delas é um segmento circular.



Setor circular

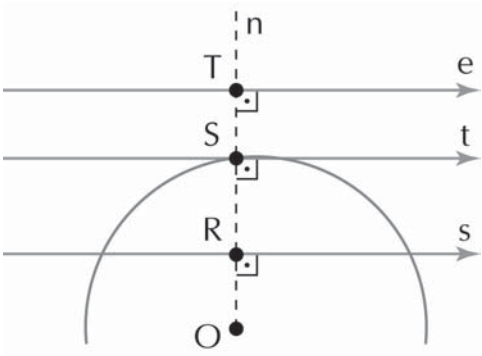
Os raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ dividem o círculo em duas regiões circulares, sendo, cada uma, um *setor circular*.



Observação

Por três pontos não alinhados passa uma e somente uma circunferência.

POSIÇÕES RELATIVAS DE UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA





Se: $\overline{OR}$ < raio → *s* é secante

$\overline{OS}$ = raio → *t* é tangente

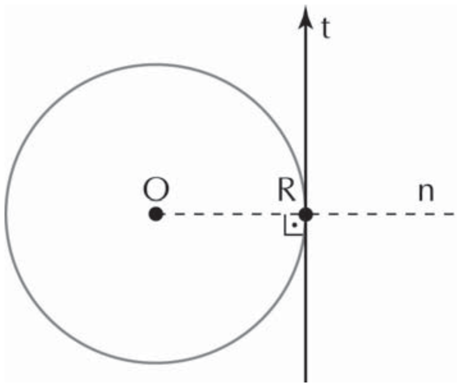
$\overline{OT}$ > raio → *e* é exterior

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DA TANGENTE E DA NORMAL A UMA CIRCUNFERÊNCIA

A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contato.

A reta suporte do raio e perpendicular à tangente é chamada de *normal*.

A normal a uma circunferência é perpendicular à tangente no ponto de contato.

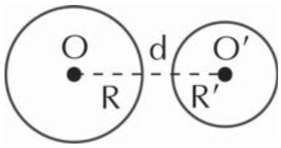


POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Seja d a medida da distância entre os centros das circunferências. As posições das circunferências em função de d são:

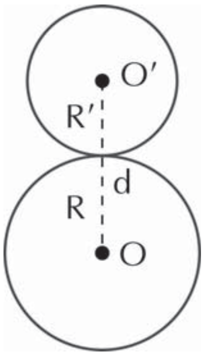
a) *Exteriores*

$d > R + R'$



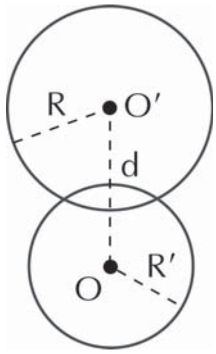
b) *Tangentes exteriormente*

$d = R + R'$



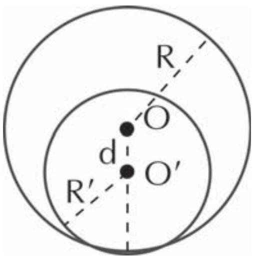
c) *Secantes*

$R - R' < d < R + R'$



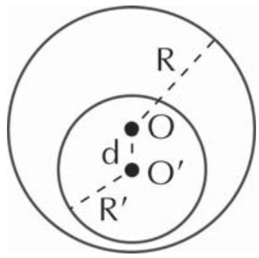
d) *Tangentes interiormente*

$d = R - R'$



e) *Interiores*

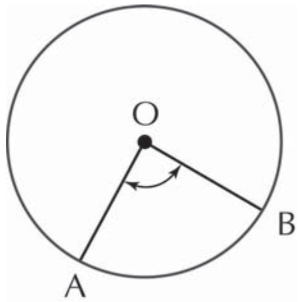
$d < R - R'$



CORRESPONDÊNCIA ENTRE ARCOS E ÂNGULOS – MEDIDAS

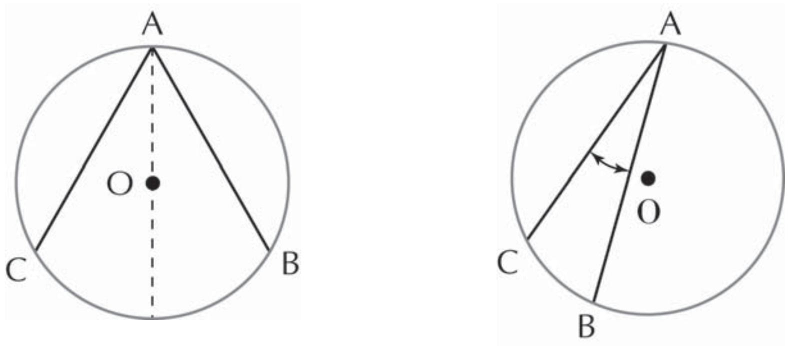
Ângulo central: quando o vértice está no centro do círculo.

$$m(A\hat{O}B) = m(\widehat{AB})$$



$A\hat{O}B$: tem por medida a medida do arco compreendido entre seus lados.

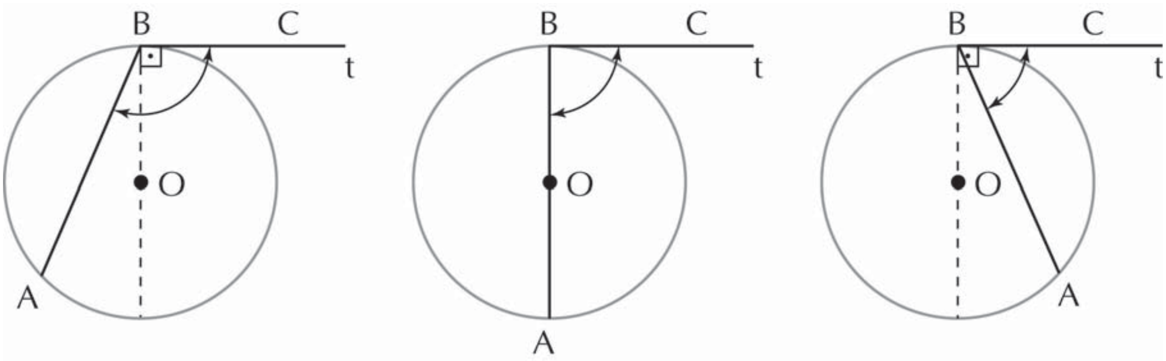
Ângulo inscrito: quando o vértice está na circunferência e os seus lados são cordas.



$$m(B\widehat{A}C) = \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$$

$B\widehat{A}C$: tem por medida a metade da medida do arco compreendido entre seus lados.

Ângulo de segmento: quando o vértice está na circunferência, um dos lados é corda e o outro é tangente à circunferência no ponto extremo da corda.

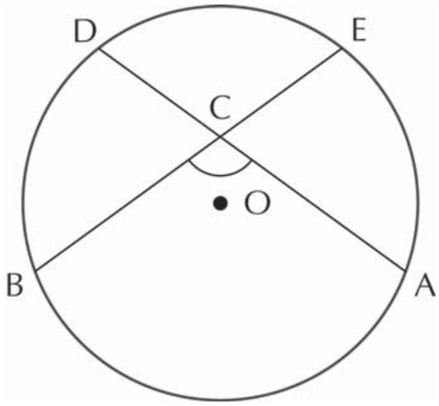


$$m(A\widehat{B}C) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

$A\widehat{B}C$: tem por medida a metade da medida do arco compreendido entre seus lados.

Ângulo excêntrico

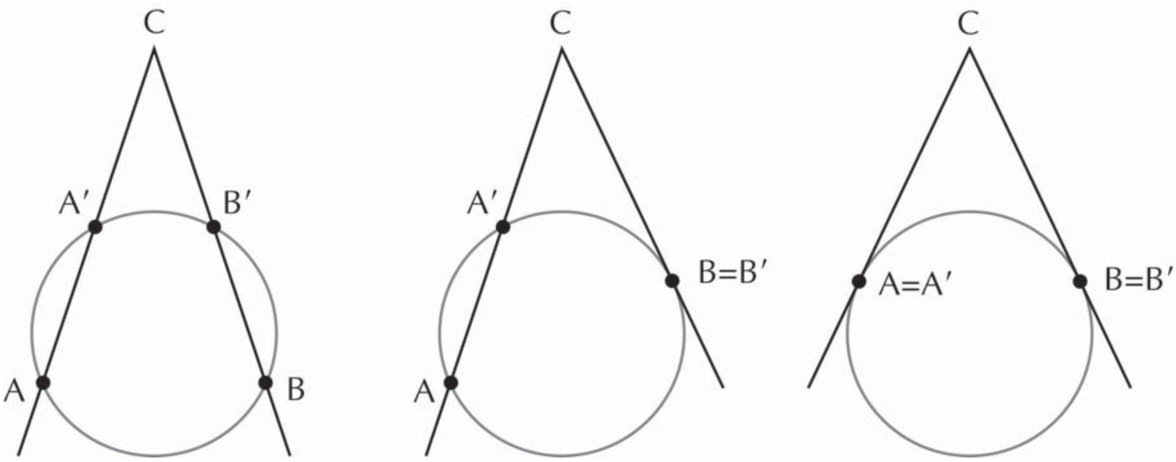
a) *Interior*: quando seu vértice é um ponto interno à circunferência e distinto do centro, e cujos lados são cordas.



$A\widehat{C}B$: tem por medida a semi-soma das medidas dos arcos compreendidos entre seus lados.

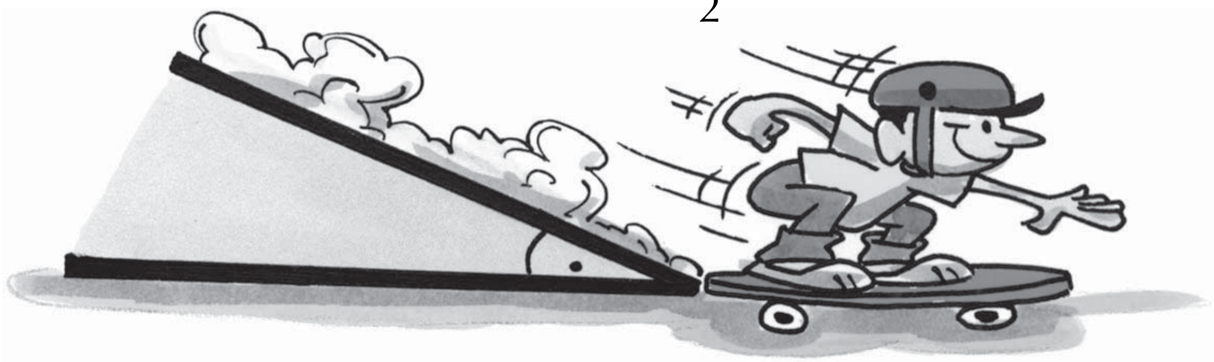
$$m(A\widehat{C}B) = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{DE})}{2}$$

b) *Exterior*: quando seu vértice é um ponto externo à circunferência e seus lados são ambos secantes, ou um é secante e o outro é tangente, ou ambos são tangentes.



$A\widehat{C}B$: tem por medida a semidiferença entre as medidas dos arcos compreendidos entre seus lados.

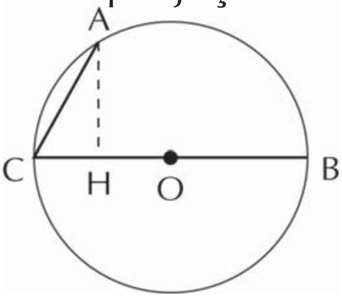
$$m(A\widehat{C}B) = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{A'B'})}{2}$$



RELAÇÕES MÉTRICAS NO CÍRCULO

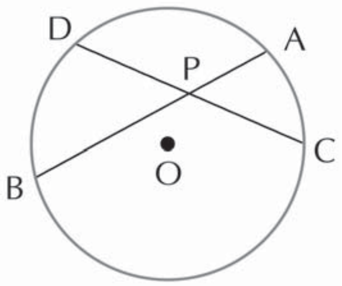
Relação entre cordas

Primeira relação: A medida de qualquer corda que passe pela extremidade de um diâmetro é média geométrica entre as medidas do diâmetro e sua projeção sobre ele.



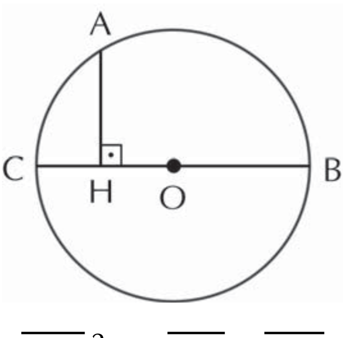
$$\overline{AC}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CH}$$

Segunda relação: Em duas cordas que se interceptam, o produto entre as medidas do segmento de uma é igual ao produto entre as medidas dos segmentos da outra.



$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

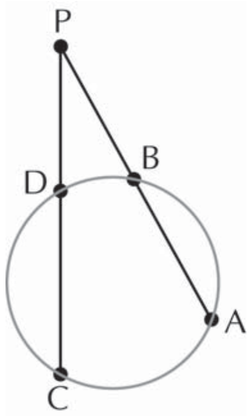
Terceira relação: A medida do segmento da perpendicular traçada de um ponto qualquer da circunferência sobre o diâmetro é média geométrica entre as medidas dos segmentos que ela determina sobre o diâmetro.



$$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$$

Quarta relação: **Relação entre secantes**

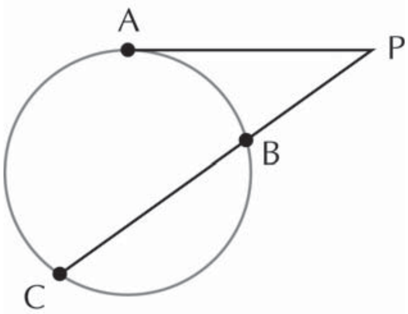
Se de um ponto qualquer exterior a um círculo traçarmos duas secantes, então o produto da medida da primeira pela sua parte externa é igual ao produto da medida da segunda pela sua parte externa.



$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$

Quinta relação: **Relação entre secante e tangente**

Se de um ponto qualquer exterior a um círculo traçarmos uma secante e uma tangente, então a medida da tangente é a média geométrica entre as medidas da secante e sua parte externa.

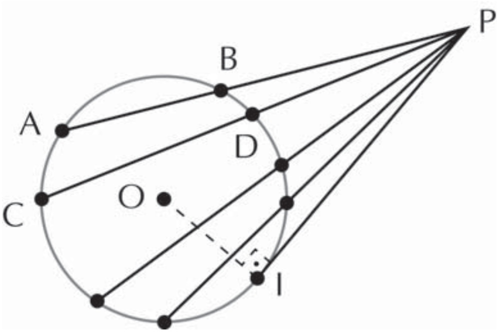


$\overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$

POTÊNCIA DE UM PONTO COM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Noções preliminares

Consideremos uma circunferência de centro *O* e raio *r* e seja *P* um ponto exterior a ela. Define-se como *Potência de um ponto*, em relação a uma circunferência, o produto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$.



Logo: $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \ldots = \overline{PI}^2$

Potência de um ponto em função do raio

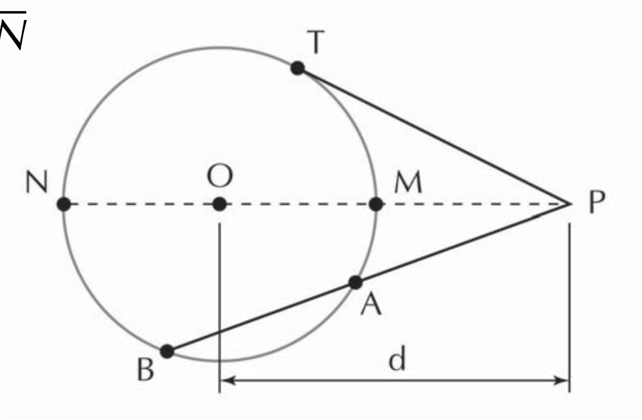
Com efeito: $\overline{PT}^2 = \overline{PM} \cdot \overline{PN}$

Mas $\overline{PM} = \overline{PO} - \overline{OM} =$

$= \overline{PO} - r = d - r$

$\overline{PN} = \overline{PO} + \overline{ON} =$

$= \overline{PO} + r = d + r$

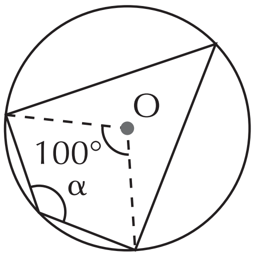


Logo: $\overline{PT}^2 = (d - r) \cdot (d + r) = d^2 - r^2$

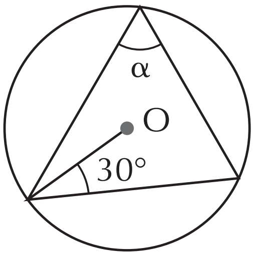
Exercícios

1. Calcule a medida do ângulo α, sabendo-se que *O* é o centro da circunferência.

a)

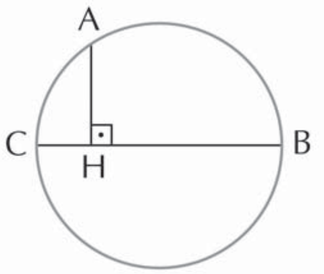


b)



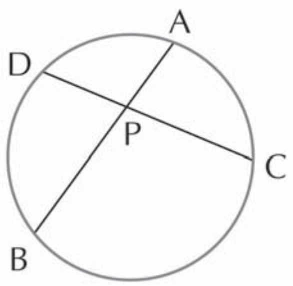
2. Calcule o valor da medida de x nas figuras abaixo:

a)



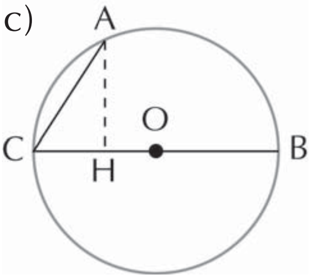
$AH = x$
$CH = 4$ cm
$HB = 9$ cm

b)



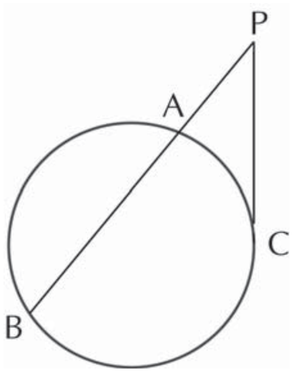
$PA = 3$ dm
$PB = 8$ dm
$PD = 6$ dm
$PC = x$

c)



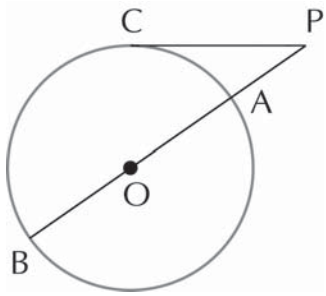
$AC = x$
$CH = 2$ cm
$HB = 6$ cm

d)



$PA = x$
$PB = 64$ m
$PC = 16$ m

e)

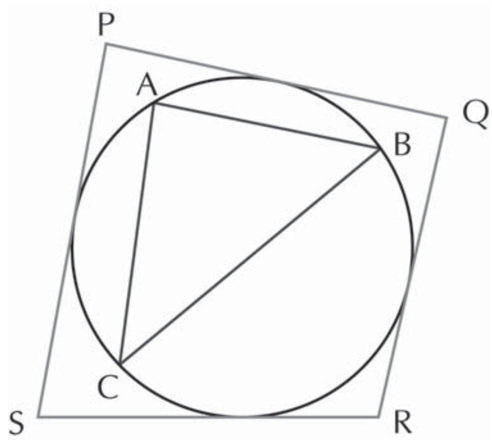


$R = x$
$PC = 8$ km
$PA = 5$ km

POLÍGONOS REGULARES

São assim chamados os polígonos que possuem:

- seus ângulos congruentes;
- seus lados congruentes.



POLÍGONOS INSCRITÍVEIS E CIRCUNSCRITÍVEIS

São *inscritíveis* os polígonos cujos lados são cordas, e *circunscritíveis* os polígonos cujos lados são tangentes à circunferência.

Assim, temos:

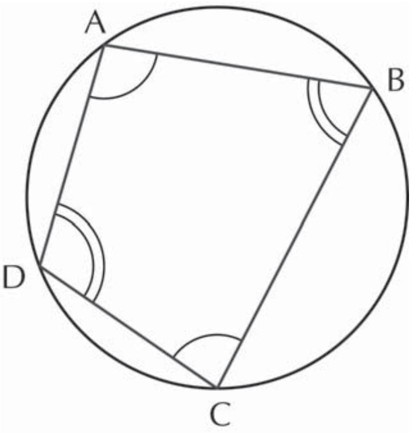
– O $\triangle ABC$ é inscritível e o polígono *PQRS* é circunscritível.

Caso os ângulos sejam congruentes e os lados também, então o polígono passa a ser regular, observando-se que todos os polígonos regulares são inscritíveis e circunscritíveis a uma circunferência.

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS

Primeira relação:

Em um quadrilátero convexo inscritível, as medidas dos ângulos opostos são suplementares.



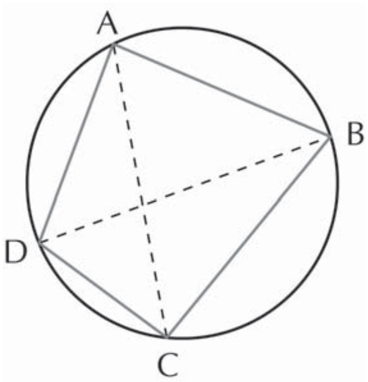
Na figura, temos:

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$$

$$\widehat{B} + \widehat{D} = 180°$$

Segunda relação: **Relação de Hiparco**

Em todo quadrilátero inscritível convexo, o produto entre as medidas das diagonais é igual à soma das medidas dos produtos dos lados opostos.

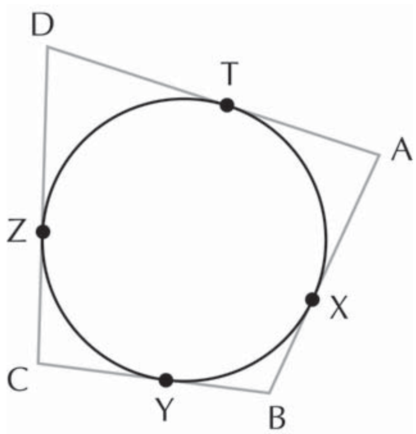


$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$



RELAÇÕES MÉTRICAS NOS QUADRILÁTEROS CIRCUNSCRITÍVEIS.

Primeira relação: **Relação de Pitot**

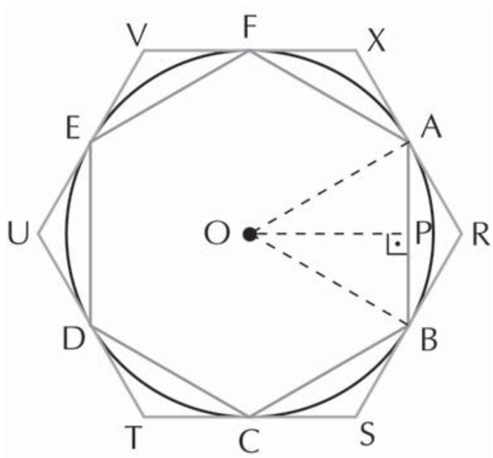


Em todo quadrilátero circunscritível, a soma das medidas de dois lados opostos é igual à soma das medidas dos outros dois.

No quadrilátero da figura, temos:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$$

ELEMENTOS PRINCIPAIS DE UM POLÍGONO REGULAR



O $\rightarrow$ centro da circunferência
$\overline{OA}$ $\rightarrow$ raio da circunferência = *re*
$\overline{OP}$ $\rightarrow$ apótema do polígono regular = *ri*
$A\hat{O}B$ $\rightarrow$ ângulo central ou cêntrico $\rightarrow$ (360° : *n*)
re $\rightarrow$ raio da circunferência circunscrita
ri $\rightarrow$ raio da circunferência inscrita

PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS REGULARES

Primeira: Dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são semelhantes.

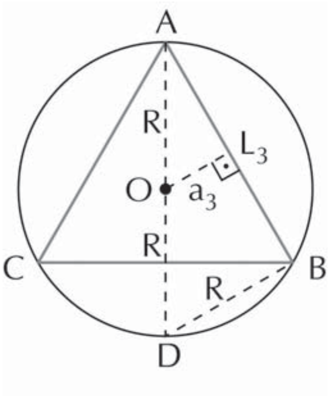
Segunda: As medidas dos perímetros de dois polígonos regulares de mesmo número de lados são proporcionais às medidas dos apótemas e dos raios.

Terceira: As medidas do ângulo interno e do ângulo central para um mesmo polígono regular são suplementares.

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLÍGONOS REGULARES

Cálculo dos lados e apótema em função do raio da circunferência circunscrita (R)

- *Triângulo eqüilátero*



1. Cálculo do lado: L_3

   $\triangle ABD$ (Pitágoras) $\rightarrow$

   $\rightarrow (L_3)^2 + R^2 = (2R)^2 \rightarrow L_3 = R\sqrt{3}$

2. Cálculo do *apótema*: a_3

   $\triangle OL3A$ (Pitágoras) $\rightarrow$

$$\rightarrow (a_3)^2 + \left(\frac{L_3}{2}\right)^2 = R^2 \rightarrow a_3 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow a_3 = \frac{R}{2}$$

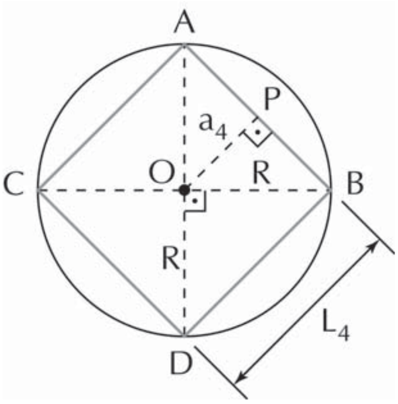
- *Quadrado*

1. Cálculo do lado: L_4

$$(L_4)^2 = R^2 + R^2 \rightarrow L_4 = R\sqrt{2}$$

2. Cálculo do *apótema*: $a_4 = \overline{OP}$

$$a_4 = \overline{OP} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{L_4}{2} \rightarrow a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$



- *Hexágono*

1. Cálculo do lado: L_6

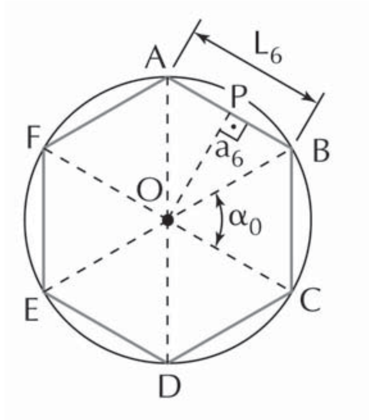
$\triangle OAB$ (*eqüilátero*) $\rightarrow$

$\rightarrow L_6 = R$ (pois: $\alpha_0 = 60°$)

2. Cálculo do *apótema*: a_6

$\triangle OPA$ (Pitágoras) $\rightarrow$

$$\rightarrow (a_6)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 \rightarrow a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$



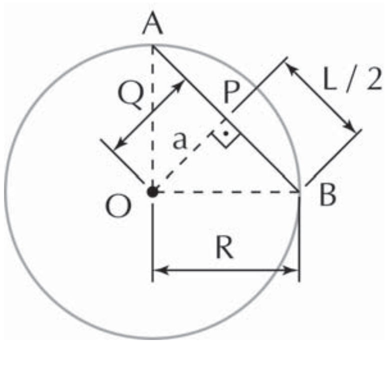
- *Relações métricas entre lado (L), raio (R), apótema (a)*

No: $\triangle OPB$ (Pitágoras):

$$\overline{OB}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PB}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow R^2 = a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow$$

$$4R^2 = 4a^2 + L^2$$



De onde podemos concluir as seguintes relações:

$L = 2\sqrt{R^2 - a^2}$	$R = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + L^2}$	$a = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - L^2}$

• *Cálculo da medida do lado do polígono regular convexo de 2*n *lados em função do lado do polígono regular de* n *lados.*

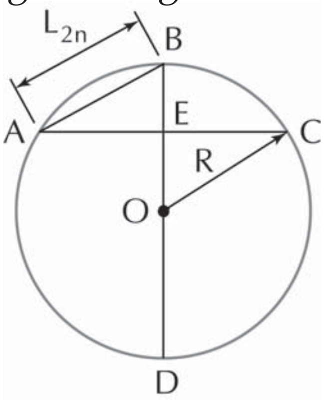
$\overline{AB} = L_{2n}$

$\overline{AC} = L_n$

$\overline{OB} = R$

$\overline{BD} = 2R$

$\overline{OE} = an$



De onde: $\overline{AB}^2 = \overline{BE} \cdot \overline{BD} \rightarrow (L_2n)^2 = (R - an) \cdot 2R$ (I)

Mas no $\triangle OCE \rightarrow \overline{OC}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{EC}^2$

ou: $R^2 = a_n^2 + \left(\dfrac{L_n}{2}\right)^2$

Donde: $a_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - L_n^2}$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$(L_{2n})^2 = \left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - L_n^2}\right) \cdot 2R$$

ou: $L_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$

MEDIÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Considerando-se um polígono regular convexo inscrito e um polígono regular circunscrito a uma mesma circunferência, ao limite comuns quando os lados de ambos duplica indefinidamente, a esse perímetro assim determinado denominaremos *comprimento da circunferência* (C), e a razão entre esse C e o raio R é constante e igual a 2π.

Expressão do comprimento C da circunferência

$$C = 2\pi R, \quad \text{onde} \quad \pi = 3{,}141592653\ldots$$

A história do π

Os egípcios sabiam trabalhar muito bem com razões. Descobriram logo que a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é a mesma para qualquer circunferência, o π.

Mas saiba que encontrar o valor de π não foi uma tarefa fácil. Vários foram os povos e cientistas ao longo da história que com inúmeros esforços foram tornando o valor de π mais preciso, ou seja, aumentando o número de suas casas decimais.

Povos e cientistas	*valor encontrado para π*
Babilônios	3
Egípcios (há 3.500 anos)	3 1/6
Arquimedes (século III a.C.)	um valor entre 3,1408 e 3,1428
Ptolomeu (século III d.C.)	3,14159
Tsu Ch'ung-Chih (século V d.C.)	um valor entre 3,1415926 e 3,1415927
Aryabhata	3,1416
Ludolph van Ceulen (século XVI)	O valor de π com a aproximação de 35 casas decimais
Século XX	O valor de π com a aproximação de milhões de casas decimais

Foi graças a Euler que, em 1737, tornou conhecido o símbolo para o número π.

Adaptado do site *www.start.com.br/matemática*

Exercícios

3. Calcule o valor das medidas do lado e do apótema para os polígonos convexos e regulares com o número de lados a seguir.
   a) $n = 3$ b) $n = 4$ c) $n = 6$
   Considerar o raio igual a 5 cm.

4. Calcule o valor da medida do lado de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência, sabendo-se que o apótema vale $2\sqrt{3}$ dm.

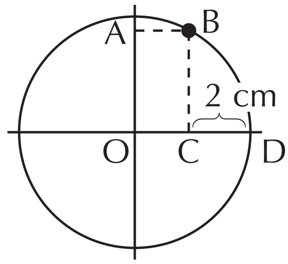
5. Calcule o valor da medida do lado de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência cujo raio é o apótema do quadrado inscrito numa circunferência de raio $2\sqrt{2}$ m.

6. Calcule o comprimento de uma circunferência cujo raio é o apótema de um quadrado inscrito numa circunferência de raio $2\sqrt{2}$ cm.

7. É dado um quadrado inscrito numa circunferência de raio R e circunscrito numa outra circunferência de raio *r*. Encontre *r* em função de *R*.

Desafio

8. Sabendo que:
   – *A* se encontra a uma distância de 7 cm de *C*.
   – *O* coincide com o centro do círculo.
   – *D* se encontra a uma distância de 2 cm de *C*.
   Qual é o raio do círculo?



Respostas

1. a) $\alpha = 130°$ b) $\alpha = 60°$
2. a) x = 6 cm d) x = 4 m
   b) x = 4 dm e) x = 3, 9 km
   c) x = 4 cm
3. a) $L_3 = 5\sqrt{3}$ cm ; $a_3 = 2,5$ cm
   b) $L_4 = 5\sqrt{2}$ cm
   $a_4 = 2,5\sqrt{2}$ cm
   c) $L_6 = 5$ cm; $a_6 = 2,5\sqrt{3}$ cm
4. 12 dm 5. $2\sqrt{3}$ m 6. 4π cm
7. $r = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$
8. Este é um problema simples com excesso de informação. Como |OABC| é um retângulo

   AC = OB = 7 cm

   Como |OB| é o raio da circunferência, logo o raio do círculo vale 7 cm.

Alfabeto Grego

αβχδεφγηιφκλμνοπθρστυϖξωψζ

Maiúsculas	Minúsculas
Α – alpha	α – alpha
Β – beta	β – beta
Γ – gamma	γ – gamma
Δ – delta	Δ – delta
Ε – épsilon	ε – épsilon
Ζ – zéta	ζ – zéta
Η – eta	η – eta
θ – thêta	θ – thêta
Ι – iota	ι – iota
Κ – cappa	κ – cappa
λ – lâmbda	λ – lâmbda
Μ– mu	μ – mu
Ν – nu	ν – nu
Ξ – ksi	ξ – ksi
Ο – omicron	ο – omicron
Π – pi	π – pi
Ρ – rho	ρ – rho
Σ – sigma	σ – sigma
Τ – tau	τ – tau
ϒ – upsilon	ϑ – upsilon
Φ – phi	φ – phi
Χ – khi	χ – khi
ψ – psi	Ψ – psi
Ω – ômega	ω – ômega
a, b, q, d, e, z, ê, t, j, k, l, m, n, x, o, p, r, s, t, u, f, qu, ps, ô.	

Sinais e símbolos matemáticos

$+ \quad - \quad \times \quad \div \quad : \quad$ ou $\quad /$

$\mid$	tal que
$\forall$	para todo
$=$	igual
$\neq$	diferente
$>$	maior que
$<$	menor que
$A \times B$	produtos de dois conjuntos – produtos cartesianos
$\sqrt{}$	radical
mdc	máximo divisor comum
mmc	mínimo múltiplo comum
$\geqslant$	maior ou igual
$\leqslant$	menor ou igual
$\cup$	união ou reunião
$\cap$	intersecção ou inter
$\Rightarrow$	acarreta em ou implica em
$\simeq$	aproximado
$\cong$	congruente

Utilizando tabelas trigonométricas

Existem tabelas que já nos fornecem calculados os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos.

A tabela a seguir nos fornece os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 1° a 89°, variando de grau em grau.

Esses valores foram aproximados para três casas decimais.

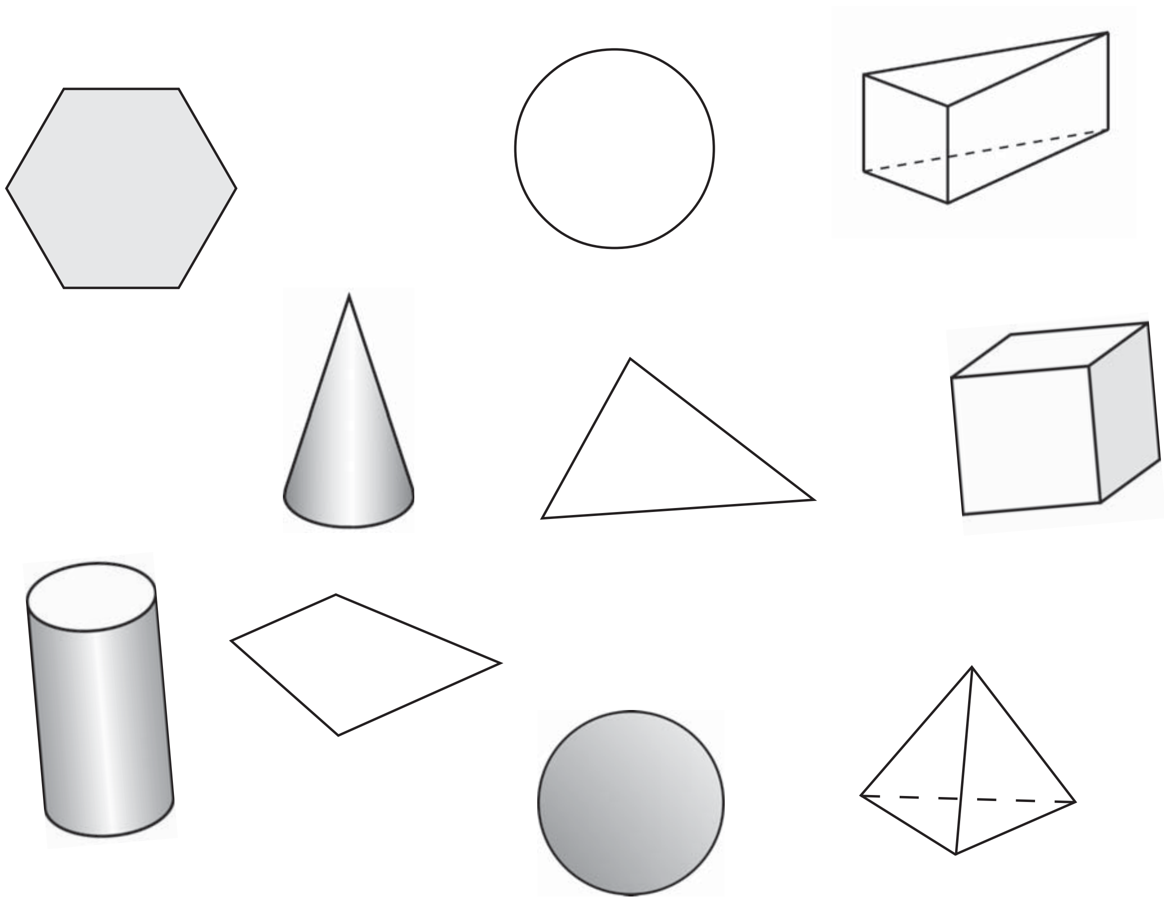


TABELA TRIGONOMÉTRICA

α	*sen* α	*cos* α	*tg* α	α	*sen* α	*cos* α	*tg* α
1°	0,017	1,000	0,017	30°	0,500	0,866	0,577
2°	0,035	0,999	0,035	31°	0,515	0, 857	0,601
3°	0,052	0,999	0,052	32°	0,530	0,848	0,625
4°	0,070	0,998	0,070	33°	0,545	0,839	0,649
5°	0,087	0,996	0,087	34°	0,559	0,829	0,675
6°	0,105	0,995	0,105	35°	0,574	0,819	0,700
7°	0,122	0,993	0,123	36°	0,588	0,809	0,727
8°	0,139	0,990	0,141	37°	0,602	0,799	0,754
9°	0,156	0,988	0,158	38°	0,616	0, 788	0,781
10°	0,174	0,985	0,176	39°	0,629	0,777	0,810
11°	0,191	0,982	0,194	40°	0,643	0,766	0,839
12°	0,208	0,978	0,213	41°	0,656	0,755	0,869
13°	0,225	0,974	0,231	42°	0,669	0,743	0,900
14°	0,242	0,970	0,249	43°	0,682	0,731	0,933
15°	0,259	0,966	0,268	44°	0,695	0,719	0,966
16°	0,276	0,961	0,287	45°	0,707	0,707	1,000
17°	0,292	0,956	0,306	46°	0,719	0,695	1,036
18°	0,309	0,951	0,325	47°	0,731	0,682	1,072
19°	0,326	0,946	0,344	48°	0,743	0,669	1,111
20°	0,342	0,940	0,364	49°	0,755	0,656	1,150
21°	0,358	0,934	0,384	50°	0,766	0,643	1,192
22°	0,375	0,927	0,404	51°	0,777	0,629	1,235
23°	0,391	0,921	0,424	52°	0,788	0,616	1,280
24°	0,407	0,914	0,445	53°	0,799	0,602	1,327
25°	0,423	0,906	0,466	54°	0,809	0,588	1,376
26°	0,438	0,899	0,488	55°	0,819	0,574	1,428
27°	0,454	0,891	0,510	56°	0,829	0,559	1,483
28°	0,469	0,883	0,532	57°	0,839	0,545	1,540
29°	0,485	0,875	0,554	58°	0,848	0,530	1,600

α	*sen* α	*cos* α	*tg* α	α	*sen* α	*cos* α	*tg* α
59°	0,857	0,515	1,664	75°	0,966	0,259	3,732
60°	0,866	0,500	1,732	76°	0,970	0,242	4,011
61°	0,875	0,485	1,804	77°	0,974	0,225	4,331
62°	0,883	0,469	1,881	78°	0,978	0,208	4,705
63°	0,891	0,454	1,963	79°	0,982	0,191	5,145
64°	0,899	0,438	2,050	80°	0,985	0,174	5,671
65°	0,906	0,423	2,145	81°	0,988	0,156	6,314
66°	0,914	0,407	2,246	82°	0,990	0,139	7,115
67°	0,921	0,391	2,356	83°	0,993	0,122	8,144
68°	0,927	0,375	2,475	84°	0,995	0,105	9,514
69°	0,934	0,358	2,605	85°	0,996	0,087	11,430
70°	0,940	0,342	2,747	86°	0,998	0,070	14,301
71°	0,946	0,326	2,904	87°	0,999	0,052	19,081
72°	0,951	0,309	3,078	88°	0,999	0,035	28,636
73°	0,956	0,292	3,271	89°	1,000	0,017	57,290
74°	0,961	0,276	3,487				

Bibliografia

DUARTE, Marcelo. *Guia dos Curiosos*. Cia. das Letras. São Paulo. 2000.

Guia de Estradas 4 Rodas. Editora Abril. São Paulo. 2000.

SÁ, Antônio Júlio César de, FARIA, Margarida Costa S. Leite de. *Clube de Matemática – A aventura da descoberta*, 1ª ed. Edições ASA. Portugal. 1992.

SIMIELLI, Maria Elena. *Geoatlas*. Editora Ática. São Paulo. 2000.

SOUZA, Júlio César de Mello e Malba Tahan. *Matemática Divertida e Curiosa*. 12ª ed. Editora Record. Rio de Janeiro. São Paulo. 2000.

Site na Internet:
www.start.com.br/matematica